2022, Vol.8, No.4, Pages 59 to 68
Journal of Water and Sustainable Development

آب و توسعه پایدار

سال هشتم، شماره ٤، ١٤٠٠، صفحات ٥٩ تا ٦٨
نشریه آب و توسعه پایدار

Article Type: Regular Article

نوع مقاله: پژوهش بنیادی

Estimation of the Velocity Distribution in Circular Pipe with Velocity Measurement at Two Points Using the Renyi Entropy

M. Teymouri Yeganeh*[1], M. M. Heidari[2]

1,2- Ph.D. Candidate in Water Structures, Assistant Professor, Water Science and Engineering Department, Razi University, Kermanshah, Iran.

*(Corresponding Author Email: m.yeganeh1390@gmail.com)

Received: 10-07-2021 Revised: 14-08-2021
Accepted: 05-09-2021 Available Online: 19-03-2022

تخمین توزیع سرعت در لوله مدور با اندازه‌گیری سرعت در دو نقطه به‌وسیله آنتروپی رنی

مریم تیموری یگانه[1]*، محمد مهدی حیدری[2]

۱و۲- به ترتیب دانشجوی دکتری سازه‌های آبی و استادیار، گروه مهندسی آب، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران.

*(نویسنده مسئول، E-Mail: m.yeganeh1390@gmail.com)

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۱۹ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۵/۲۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۱۴ تاریخ انتشار: ۱۴۰۰/۱۲/۲۸

Abstract

In most practical hydraulic engineering problems, accurate flow measurements are required. Understanding flow quantities is an important point in water resources management. Therefore, providing the most appropriate velocity distribution estimation relation that is consistent with the measurement data has always been of interest to researchers. With the development of entropy theory, these methods have been used in a wide range of engineering sciences, including hydraulics and fluid mechanics. In the present study, using the Renyi entropy method, the effective parameter "m" on the Renyi entropy parameter "G" was investigated and the velocity distribution in a circular pipe in the conditions that 36.2, 50, and 70% of the circular pipe fills. It was estimated at two points by measuring the velocity at depths (0.1D-0.9D), (0.2D-0.8D), and (0.3D-0.7D) relative to the water level. In order to determine the accuracy of estimating the velocity distribution using the Renyi method, the correlation coefficient and the root mean square error was used and also to determine the accuracy of entropy parameters, normalized root mean square error was used. The results showed that the Renyi entropy method has high accuracy with observational data. Also, velocity measurement at depth (0.9D-0.1D) from the water surface for 36.2, 50, and 70% of the circular pipe, with the normalized root mean square error to 0.2325, 2.36, and 0.51 respectively, has higher accuracy.

Keywords: Entropy Function Maximization, Velocity Estimation, Lagrange Coefficients, Two-Point Method.

چکیده

در بیشتر مسائل عملی مهندسی هیدرولیک، به اندازه‌گیری دقیق جریان نیاز است. شناخت کمیت‌های جریان نکته مهم و حائز اهمیتی در مدیریت منابع آبی می‌باشد. از این‌رو ارائه مناسبترین رابطه برآورد توزیع سرعت که منطبق بر داده‌های اندازه‌گیری باشد همواره مورد توجه محققین بوده است. با توسعه تئوری آنتروپی، این روش‌ها در طیف وسیعی از علوم مهندسی از جمله هیدرولیک و مکانیک سیالات به‌کار برده شده‌اند. در مطالعه حاضر با استفاده از روش آنتروپی رنی، پارامتر تأثیرگذار "m" بر پارامتر آنتروپی رنی "G" مورد بررسی قرار گرفت و توزیع سرعت در لوله مدور در شرایطی که ۳۶/۲، ۵۰ و ۷۰ درصد از لوله دایره‌ای پر می‌باشد، در دو نقطه با اندازه‌گیری سرعت در اعماق (۰/۱D-۰/۹D)، (۰/۲D-۰/۸D) و (۰/۳D-۰/۷D) نسبت به سطح آب تخمین زده شد. به‌منظور تعیین دقت برآورد توزیع سرعت با استفاده از روش رنی، از ضریب همبستگی (ρ) و ریشه میانگین مربع خطا (RMSE) و همچنین برای تعیین دقت پارامترهای آنتروپی از ریشه میانگین مربعات خطای نرمال شده (NRMSE) استفاده شد. نتایج نشان داد روش آنتروپی رنی با داده‌های مشاهداتی دقت بالایی دارد. همچنین اندازه‌گیری سرعت در عمق ۰/۱D-۰/۹D از سطح آب برای حالات ۳۶/۲، ۵۰ و ۷۰ درصد از لوله دایره‌ای، به‌ترتیب با ریشه میانگین مربعات خطای نرمال شده ۰/۲۳۲۵، ۲/۳۶ و ۰/۵۱ دقت بالاتری دارد.

واژه‌های کلیدی: حداکثرسازی تابع آنتروپی، تخمین سرعت، ضرایب لاگرانژ، روش دو نقطه‌ای.

HomePage: https://jwsd.um.ac.ir
How to cite this article: Teymouri Yeganeh M. and Heidari. M. M. 2022. Estimation of the Velocity Distribution in Circular Pipe with Velocity Measurement at Two Points Using the Renyi Entropy. Journal of Water and Sustainable Development, 8(4): 59-68. doi: http://dx.doi.org/10.22067/jwsd.v8i4.2107.1060

مقدمه

توزیع سرعت مهمترین متغیر برای تعیین مشخصات جریان مانند دبی، توزیع تنش برشی، رسوب‌گذاری، فرسایش، تلفات انرژی و مقاومت جریان در مجاری روباز است. توزیع سرعت در کانال‌ها تحت تاثیر زبری بستر و جداره، هندسه کانال (شامل عرض کف، شیب جداره و شیب کف کانال) و وجود خم در کانال قرار می‌گیرد. در کانال‌های روباز با استفاده از سرعت‌سنج می‌توان سرعت در یک نقطه کانال را اندازه‌گیری کرد. بنابراین برای بررسی توزیع سرعت در رودخانه‌ها نیاز به برداشت سرعت در تعداد زیاد نقاط می‌باشد که وقت‌گیر و هزینه‌بر است. همچنین دبی و تراز سطح آب در جریان غیرماندگار و شرایط سیلابی به‌گونه‌ای در نوسان است که اندازه‌گیری سرعت در تمام نقاط در یک لحظه با استفاده از سرعت‌سنج امکان‌پذیر نمی‌باشد. ازاین‌رو ارائه یک روش تک نقطه‌ای یا دو نقطه‌ای اندازه‌گیری سرعت که منجر به تخمین دبی و توزیع سرعت شود، اهمیت خاصی دارد. در خط لوله انتقال که اغلب به شکل دایره‌ای می‌باشد رابطه کلی برای توزیع سرعت براساس معادله مانینگ تعیین می‌شود (Sterling و knight، ۲۰۰۰؛ Clark و Kehler، ۲۰۱۱). اما رابطه دقیق‌تر نیاز به آگاهی از توزیع سرعت مقطعی دارد. Clark و Kehler (۲۰۱۱) نشان دادند حداکثر سرعت در لوله مدور تا حدی پر در زیر سطح آب رخ می‌دهد و توزیع سرعت در نزدیکی سطح آب است که عمدتا توسط جریان ثانویه تحت تأثیر قرار می‌گیرد. در سال‌های اخیر، براساس آنتروپی Shannon (۱۹۴۸)، تئوری آنتروپی سرعت توسعه یافت و در بسیاری از مناطق اعمال شد با فرض اینکه تابع توزیع تجمعی (CDF) تابع عمق جریان می‌باشد، Chiu (۱۹۸۸) یک فرمول توزیع سرعت دوبعدی را به‌دست آورد. Yoon و همکاران (۲۰۱۲) از طریق مطالعه تجربی ثابت کردند روش Chiu (۱۹۸۹) دقت مناسبی در لوله مدور دارد. Luo و Singh (۲۰۱۱) بر اساس اصل حداکثر آنتروپی، یک رابطه برای توزیع سرعت دوبعدی در کانال‌های باز مستطیلی شکل با استفاده از آنتروپی تسالیس به‌دست آوردند. اگرچه این روش در مقایسه با روش چیو بهتر می‌باشد، اما به دلیل تعداد زیادی از پارامترهای مورد استفاده محدودیت دارد. Marini و همکاران (۲۰۱۱) یک روش جدیدبرای توزیع سرعت در کانال‌های باز مستطیلی شکل با آنتروپی شانون، که در آن یک CDF جدید فرض شد، به‌دست آوردند. Cui و Singh (۲۰۱۳) روش جدید دیگری برای استخراج توزیع سرعت با استفاده از آنتروپی تسالیس برای کانال‌های باز مستطیلی شکل پیشنهاد کردند. Rahimpour و Maghrebi (۲۰۰۶) از روش تک نقطه‌ای Maghrebi (۲۰۰۶) که به‌منظور تخمین دبی ارائه گردشدید، برای به‌دست آوردن دبی در بخش‌های مختلف رودخانه در هنگام سیل استفاده نمودند.

در روش ارائه شده دبی می‌تواند به‌صورت خودکار در یک محل اندازه‌گیری ثابت در بخش رودخانه یا روی سطح آب، تخمین زده شود. آن‌ها نشان دادند نتایج به‌دست آمده از منحنی‌های دبی-اشل با استفاده از اندازه‌گیری به روش تک نقطه‌ای در مقایسه با نمونه‌های تجربی مشاهده‌ای می‌تواند با دقت بالایی دبی سیلاب را برآورد نماید و این میزان اختلاف با داده‌های مشاهده‌ای کمتر از ۵ درصد می‌باشد. Teymouri Yeganeh و Heidari (۲۰۲۰) با استفاده از سه روش آنتروپی شانون، رنی و تسالیس، توزیع سرعت را با اندازه‌گیری سرعت در دو نقطه در کانال مستطیلی روباز بررسی کردند، نتایج مطالعات آن‌ها دقت بالای هر سه روش را در تخمین توزیع سرعت نشان داد. Kumbhakar و Ghoshal (۲۰۱۶) توزیع سرعت دو بعدی با استفاده از روش آنتروپی رنی در کانال‌های روباز را بررسی کردند و نتایج مقایسه داده‌های آزمایشگاهی با روش آنتروپی رنی دقت خوبی را نشان داد. Kumbhakar و Ghoshal (۲۰۱۷) با استفاده از روش آنتروپی رنی توزیع سرعت یک بعدی در کانال روباز را بررسی کردند، نتایج بررسی‌های آن‌ها دقت بالای این روش را با داده‌های اندازه‌گیری شده نشان داد. تیموری یگانه و همکاران (۱۴۰۰) به بررسی توزیع عمقی سرعت طولی با استفاده از روش بهینه سازی بر مبنای الگوریتم ژنتیک پرداختند، آن‌ها پارامترهای روابط توزیع سرعت یانگ، ژولیان، چیو و تسالیس را بهینه نموده و براساس آن توزیع سرعت یک بعدی را تخمین زدند، نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد که هر ۴ روش دارای دقت بالایی در شبیه سازی توزیع سرعت بوده و با توجه به اینکه تعداد پارامترهای بهینه شده در روش تسالیس و ژولیان بیشتر از دو مدل دیگر است، آن‌ها را برای مدل‌سازی رودخانه‌های آبرفتی توصیه نمودند. Jiang و Chen (۲۰۱۶) توزیع سرعت با استفاده از روش آنتروپی تسالیس در لوله دایره‌ای تا حدی پر را بررسی کردند. نتایج مطالعات آن‌ها نشان داد توزیع سرعت تخمین زده شده به روش اصل حداکثر آنتروپی تسالیس دقت بالایی در مقایسه با داده‌های اندازه‌گیری شده دارد. در این تحقیق هدف تخمین توزیع سرعت دو بعدی با استفاده از روش آنتروپی رنی با اندازه‌گیری سرعت در دو نقطه می‌باشد. همچنین اثر موقعیت دو نقطه در تخمین توزیع سرعت بررسی شد.

مواد و روش‌ها

- آنتروپی رنی

Renyi (۱۹۶۱) با استفاده از اصل حداکثر آنتروپی، تابع آنتروپی را به‌صورت رابطه (۱) بیان نمود:

$$H(u) = \frac{1}{(1-m)} \ln \int_0^{u_{max}} \left[p(u)^m \right] du \qquad (۱)$$

به‌منظور سادگی حل، سرعت بدون بعد ($\hat{u} = u/u_{max}$) به‌عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود، بنابراین مقدار تابع آنتروپی رنی و قید اول و دوم به‌صورت روابط (۲) تا (۴) می‌باشند:

$$H(\hat{u}) = \frac{1}{1-m} \ln \left\{ \int_0^1 [p(\hat{u})]^m \, d\hat{u} \right\} \quad (۲)$$

$$\int_0^1 p(\hat{u}) d\hat{u} = 1 \quad (۳)$$

$$\int_0^1 \hat{u} p(\hat{u}) d\hat{u} = \hat{u}_m \quad (۴)$$

در رابطه فوق، $\hat{u}_m = \bar{u}/u_{max}$ متوسط سرعت بدون بعد و $\bar{u}$ میانگین سرعت مقطع عرضی است. در صورتی‌که تابع $H(\hat{u})$ در رابطه (۲) با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ حداکثرسازی شود شکل صریحی برای تابع چگالی به‌دست آورده نمی‌شود. بنابراین برای سادگی حل با در نظر گرفتن m بین صفر تا یک، تابع $w(\hat{u})$ به‌صورت رابطه (۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$\int_0^1 \left[p(\hat{u})^m \right] d\hat{u} = e^{(1-m)H_m} = w(\hat{u}) \quad (۵)$$

با حداکثرسازی تابع $w(\hat{u})$ از طریق روش لاگرانژ، تابع $H(\hat{u})$ نیز ماکزیمم می‌شود. تابع لاگرانژ با در نظر گرفتن قید اول و دوم، به‌صورت رابطه (۶) در نظر گرفته می‌شود:

$$L(\hat{u}) = \int_0^1 \left[p(\hat{u})^m \right] d\hat{u} + \int_0^1 \lambda_1 p(\hat{u}) d\hat{u} + \int_0^1 \lambda_1 \hat{u} p(\hat{u}) d\hat{u} - \lambda_1 - \lambda_2 \hat{u}_m \quad (۶)$$

به‌منظور حداکثرسازی تابع آنتروپی از تابع $L(u)$ نسبت $p(\hat{u})$ ، λ_1 و λ_2 مشتق گرفته و حاصل برابر صفر قرار داده می‌شود. با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$p(\hat{u}) = \left(\frac{-\lambda_1 - \lambda_2 \hat{u}}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (۷)$$

با جایگزینی رابطه (۷) در قید اول یعنی رابطه (۳) رابطه (۸) به‌دست خواهد آمد:

$$\int_0^1 \left[\frac{-\lambda_1 - \lambda_2 \hat{u}}{m} \right]^{\frac{1}{m-1}} d\hat{u} = 1 \quad (۸)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۸) و ساده‌سازی، رابطه (۹) حاصل می‌شود:

$$\frac{1-m}{\lambda_2 (m)^{\frac{m}{m-1}}} \left[(-\lambda_1 - \lambda_2)^{\frac{m}{m-1}} - (-\lambda_1)^{\frac{m}{m-1}} \right] = 1 \quad (۹)$$

متغیر G به‌صورت رابطه (۱۰) در نظر گرفته می‌شود:

$$G = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (۱۰)$$

بنابراین ضریب لاگرانژ λ_1 به صورت رابطه (۱۱) ارائه می‌شود:

$$\lambda_1 = \frac{G\lambda_2}{1-G} \quad (۱۱)$$

با جایگزینی رابطه (۱۱) در (۹) و ساده‌سازی، رابطه (۱۲) حاصل می‌شود:

$$\lambda_2 = m^m (1-m)^{1-m} \left(\frac{1}{G-1} \right)^{-m} \left(1 - G^{\frac{m}{m-1}} \right)^{1-m} \quad (۱۲)$$

با جایگزینی رابطه (۷) در قید دوم یعنی رابطه (۴)، رابطه (۱۳) حبه‌دست خواهد آمد:

$$\int_0^1 \hat{u} \left[\frac{-\lambda_1 - \lambda_2 \hat{u}}{m} \right]^{\frac{1}{m-1}} d\hat{u} = \hat{u}_m \quad (۱۳)$$

حاصل انتگرال معادله (۱۳) به‌صورت رابطه (۱۴) می‌باشد:

$$\frac{1-m}{\lambda_2{}^2 (m)^{\frac{m}{m-1}}} \left\{ \frac{m-1}{2m-1} \left[(-\lambda_1 - \lambda_2)^{\frac{2m-1}{m-1}} - (-\lambda_1)^{\frac{2m-1}{m-1}} \right] + \frac{\lambda_1 (m-1)}{m} \left[(-\lambda_1 - \lambda_2)^{\frac{m}{m-1}} - (-\lambda_1)^{\frac{m}{m-1}} \right] \right\} = \hat{u}_m \quad (۱۴)$$

با جایگزینی روابط (۱۲) و (۱۳) در رابطه (۱۴) و ساده‌سازی، رابطه بین سرعت متوسط مقطع و سرعت حداکثر (رابطه ۱۵ به‌دست آورده می‌شود (Ghoshal وKumbhakar ، ۲۰۱۶):

$$\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \frac{m}{1-m} \left(\frac{1}{G-1} \right)^{\frac{m}{1-m}} (1-G^{\frac{m}{m-1}})^{-1} \left\{ \frac{m-1}{2m-1} \left[(\frac{1}{G-1})^{\frac{2m-1}{m-1}} - (\frac{G}{G-1})^{\frac{2m-1}{m-1}} \right] + \frac{m-1}{m} \frac{G}{1-G} \left[(\frac{1}{G-1})^{\frac{m}{m-1}} - (\frac{G}{G-1})^{\frac{m}{m-1}} \right] \right\} \quad (۱۵)$$

- تابع توزیع تجمعی

تابع توزیع تجمعی باید قادر به مجسم کردن هندسه خط لوله و برخی از ویژگی‌های مهم توزیع سرعت باشد. بنابراین تابع توزیع تجمعی باید خصوصیات زیر را دارا باشد: ۱) مشتق پذیر باشد ۲) بین صفر ویک تعریف شده باشد ۳) مقدار آن روی دیواره لوله باید صفر باشد و در موقعیت سرعت ماکزیمم u_{max} یک می‌باشد ۴) در محور قائم از خط مرکزی تابع توزیع تجمعی به‌صورت یکنواخت از صفر تا u_{max} افزایش می‌یابد. خط لوله مدور تا حدی پر در شکل (۱) نشان داده شده است که R شعاع لوله H عمق آب و h $(0 < h < H)$ فاصله از موقعیت u_{max} به بستر لوله می‌باشد. به دلیل اینکه سرعت در مرز صفر در نظر گرفته می‌شود، ساده‌ترین معادله برای تابع توزیع تجمعی، همان معادله سهموی می‌باشد (Jiang و Chen، ۲۰۱۶):

$$F_1(\hat{u}) = 1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2 - \left(\frac{y}{R} - 1 \right)^2 \quad (۱۶)$$

هنگامی‌که ماکزیمم سرعت جریان در y=h، اتفاق می‌افتد، تابع توزیع تجمعی برابر $F_1(\hat{u}) = 1$ می‌باشد، سپس تابع توزیع تجمعی را می‌توان به‌صورت رابطه (۱۷) شرح داد:

$$F_1(\hat{u}) = \left[1 - \left(\frac{y}{h} - 1 \right)^{2L} \right]^K \left[1 - \left(\frac{x}{R} \right)^{\frac{D}{H}} \right] \quad (۱۷)$$

که در آن 'D قطر لوله، و زمانی‌که $y \le h$ باشد، L=1 و K=1 می‌باشد درحالی‌که وقتی $y > h$ باشد، L=2h/H و L=2(H-h)/H می‌باشد. در خط مرکزی از مقطع عرضی لوله، تابع توزیع تجمعی با افزایش سرعت جریان افزایش می‌یابد. بنابراین تابع توزیع تجمعی را

می‌توان به‌صورت رابطه (۱۸) به‌دست آورد:

$$F_2(\hat{u}) = \frac{2y}{R} - \left(\frac{y}{R}\right)^2$$ (۱۸)

از آنجایی‌که ماکزیمم سرعت جریان روی سطح آب یا زیر سطح آب رخ می‌دهد وقتی‌که تابع توزیع تجمعی $F_2(\hat{u}) = 1$، موقعیت حداکثر سرعت $y_{u\max} \le H$ می‌باشد و معادله (۱۸) به‌صورت ذیل تغییر می‌یابد:

$$F_2(\hat{u}) = 4\left[\left(\frac{y}{2R}\right)^{b} - \left(\frac{y}{2R}\right)^{2b}\right]$$ (۱۹)

که در آن b عامل تعدیل عمق آب می‌باشد. موقعیت ماکزیمم سرعت جریان y=h و $F_2(\hat{u}) = 1$ می‌باشد، بنابراین b به‌صورت ذیل شرح داده می‌شود:

$$b = \frac{\ln 2}{[\ln(2R) - \ln h]}$$ (۲۰)

با جایگزینی b در داخل معادله (۲۰) داریم:

$$F_2(\hat{u}) = 4\left[\left(\frac{y}{2R}\right)^{\frac{\ln 2}{[\ln(2R)-\ln h]}} - \left(\frac{y}{2R}\right)^{\frac{2\ln 2}{[\ln(2R)-\ln h]}}\right]$$ (۲۱)

از آنجایی‌که سطح مقطع لوله مدور است، در هر جهت عمودی، ارتفاع نسبی به‌صورت ذیل تعیین می‌شود:

$$y' = y - \left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right)$$ (۲۲)

بنابراین تابع توزیع تجمعی $F_1(\hat{u})$ و $F_2(\hat{u})$ به‌ترتیب به‌صورت روابط (۲۳ و۲۴) تبدیل می‌شود:

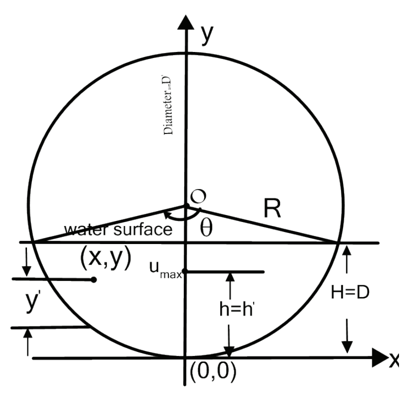
$$F_1(\hat{u}) = \left[1 - \left(\frac{y'}{h'} - 1\right)^{2L}\right]^{K}\left[1 - \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{D'}{H}}\right]$$ (۲۳)

$$F_2(\hat{u}) = 4\left[\left(\frac{y'}{2R}\right)^{\frac{\ln 2}{[\ln(2R)-\ln h']}} - \left(\frac{y'}{2R}\right)^{\frac{2\ln 2}{[\ln(2R)-\ln h']}}\right]$$ (۲۴)

h' نشان دهنده فاصله عمودی از حداکثر سرعت به بستر لوله در هر محور قائم می‌باشد. با یکپارچه کردن معادلات (۲۳) و(۲۴)، تابع توزیع تجمعی از توزیع سرعت در لوله تا حدی پر مدور جریان به‌صورت ذیل شرح داده می‌شود:

$$F(\hat{u}) = F_1(\hat{u})F_2(\hat{u}) = 4\left[1 - \left(\frac{y'}{h'} - 1\right)^{2L}\right]^{K}\left[1 - \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{D}{H}}\right]\left[\left(\frac{y'}{2R}\right)^{s} - \left(\frac{y'}{2R}\right)^{2s}\right]$$ (۲۵)

که در آن $s = \ln 2 / \left[\ln(2R) - \ln h'\right]$ می‌باشد.



شکل ۱- شماتیکی از سیستم مختصات دایره‌ای

برای به‌دست آوردن توزیع سرعت مبتنی بر آنتروپی رنی می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial x} = f(\hat{u})\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\left[\frac{1}{m}(-\lambda_1 - \lambda_2\hat{u})\right]^{1/(m-1)}$$ (۲۶)

$$\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial y} = f(\hat{u})\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}\left[\frac{1}{m}(-\lambda_1 - \lambda_2\hat{u})\right]^{1/(m-1)}$$ (۲۷)

با تعریف یک متغیر جدید

$$w = \left[\frac{1}{m}(-\lambda_1 - \lambda_2\hat{u})\right]^{\frac{m}{m-1}}$$ (۲۸)

باتوجه‌به مشتقات جزیی w نسبت به x وy معادلات به‌صورت ذیل به‌دست آورده می‌شوند:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \hat{u}}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\times\left[(-\lambda_1 - \lambda_2)/m\right]^{1/m-1}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$$ (۲۹)

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial \hat{u}}\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\times\left[(-\lambda_1 - \lambda_2)/m\right]^{1/m-1}\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}$$ (۳۰)

با جایگزینی معادلات (۲۹) و(۳۰) در داخل معادلات (۲۶) و(۲۷) رابطه بین $F(\hat{u})$ وw به‌صورت ذیل می‌باشد:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial x}$$ (۳۱)

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial y}$$ (۳۲)

با استفاده از قانون لایب نیس از معادلات (۳۱) و(۳۲) می‌توان انتگرال‌گیری کرد:

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = w(x,y) - w(0,0)$$ (۳۳)

از آنجایی‌که (۰و۰) در روی دیواره لوله اتفاق می‌افتد معادله (۳۳) به‌صورت معادله (۳۴) بیان می‌شود:

$$w(x,y) - w(0,0) = w(x,y) - \left[-\lambda_1 / m\right]^{\frac{m}{m-1}}$$ (۳۴)

انتگرال معین قسمت سمت چپ معادله (۳۳) در یک نقطه عمومی (x,y) با استفاده از یک منحنی چند وجهی که از مبدا (۰,۰) شروع شده محاسبه می‌شود و از طریق نقطه $(x, R - \sqrt{R^2 - x^2})$ بر روی دیوارعبور می‌نماید و در نقطه (x,y) به پایان می‌رسد. در دیواره لوله در زیر سطح آب CDF صفر می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial x}dx + \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial y}dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,R-\sqrt{R^2-x^2})} \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial x}dx + \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial y}dy$$ (۳۵)

$$)dy + \int_{(x,R-\sqrt{R^2-x^2})}^{(x,y)} \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial x}dx + \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial y}dy$$

$$= \int_{(x,R-\sqrt{R^2-x^2})}^{y} \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial x}dx + \left[-\lambda_2 / m - 1\right]\frac{\partial F(\hat{u})}{\partial y}dy = \frac{\left[-\lambda_2 / m - 1\right]y'}{y}F(\hat{u})$$

با مساوی قرار دادن سمت راست معادله (۳۳) با سمت راست معادله (۳۴) خواهیم داشت:

$$w(x,y) = \frac{y'\left[-\lambda_2 / m - 1\right]}{y}F(\hat{u}) - \left[-\lambda_1 / m\right]^{\frac{m}{m-1}}$$ (۳۶)

با جایگزینی معادلات (۲۲) و (۲۸) در داخل معادله (۳۶) توزیع سرعت مبتنی بر آنتروپی رنی به‌صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\hat{u}=\frac{-1}{\lambda_2}\left\{\left[-\left[-\lambda_1/m\right]^{m/(m-1)}+\frac{y'\left[-\lambda_2/m-1\right]F(\hat{u})}{y}\right]^{1-1/m}\times m+\lambda_1\right\} \quad (۳۷)$$

همچنین با جایگذاری معادلات (۱۱) و (۱۲) در معادله (۳۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\hat{u}=A-\left[A^C+\left(B^C-A^C\right)F(\hat{u})\frac{y'}{y}\right]^{1/C}\\&A=\frac{G}{G-1}\\&B=\frac{1}{G-1}\\&C=\frac{m}{m-1}\end{aligned} \quad (۳۸)$$

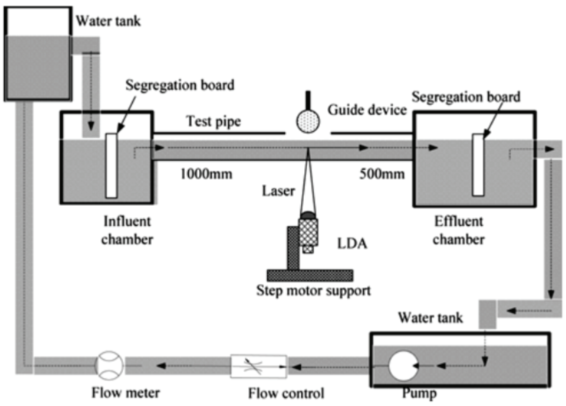
معادله (۳۸) بیانگر توزیع دو بعدی سرعت در لوله دایره‌ای براساس روش آنتروپی رنی می‌باشد.

در این تحقیق به‌منظور تخمین توزیع سرعت، در ابتدا پارامترهای آنتروپی با اندازه‌گیری سرعت در دو نقطه در مرکز لوله دایره‌ای که به‌واسطه دور بودن از جداره‌ها کمترین تاثیر از دیواره‌ها را دارد و سرعت ماکزیمم در آن اتفاق می‌افتد، مطابق روابط ذیل با استفاده از روش‌های عددی و با آزمون خطا محاسبه می‌شود. سپس با داشتن پارامترهای آنتروپی می‌توان توزیع سرعت را با استفاده از رابطه (۳۷) در مقاطع مختلف به‌دست آورد.

$$\begin{aligned}&\frac{u_1}{u_2}=\frac{A-\left[A^C+\left(B^C-A^C\right)\xi_1\right]^{1/C}}{A-\left[A^C+\left(B^C-A^C\right)\xi_2\right]^{1/C}}\\&A=\frac{G}{G-1}\\&B=\frac{1}{G-1}\\&C=\frac{m}{m-1}\\&\xi_1=\frac{y_1'}{y_1}\times4\times\left[1-\left(\frac{y_1'}{h_1'}-1\right)^{2L}\right]^K\times\\&\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{D}{H}}\right]\times\left[\left(\frac{y_1'}{2R}\right)^{s_1}-\left(\frac{y_1'}{2R}\right)^{2s_1}\right]\\&\xi_2=\frac{y_2'}{y_2}\times4\times\left[1-\left(\frac{y_2'}{h_2'}-1\right)^{2L}\right]^K\times\\&\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{D}{H}}\right]\times\left[\left(\frac{y_2'}{2R}\right)^{s}-\left(\frac{y_2'}{2R}\right)^{2s_2}\right]\end{aligned} \quad (۳۹)$$

- مشخصات آزمایش

در شکل (۲) تجهیزات آزمایشگاهی در آزمایش Jiang و Chen (۲۰۱۶) نشان داده شده است، برای اندازه‌گیری سرعت متوسط مایع از فلومتر الکترومغناطیسی و برای اندازه‌گیری سرعت نقطه‌ای از لیزر داپلر استفاده شده است. قطر لوله آزمایش ۰/۰۲۴ متر، زبری جداره ۰/۰۰۳ متر و شیب لوله ۰/۰۰۳۳ و همچنین ضریب زبری لوله ۰/۰۰۸۵ می‌باشد. در جدول (۱)، مشخصات مربوط به اندازه‌گیری سرعت در ۳۶/۲٪ و ۵۰٪ و ۷۰٪ عمق جریان نسبت به سطح آب بیان شده است.



شکل ۲- شمایی از تجهیزات آزمایشگاهی (Jiang و Chen، ۲۰۱۶)

جدول ۱- مشخصات مربوط به اندازه‌گیری سرعت

	درصد عمق جریان نسبت به سطح آب		
	٪۵۰	٪۳۶/۲	٪۷۰
H(mm)	۱۲	۸/۷	۱۶/۸
Rh(mm)	۶	۴/۸	۷/۱
$\bar{u}$(m/s)	۰/۲۱۰۸	۰/۱۸۱۶	۰/۲۳۶۴
u_{max}(m/s)	۰/۲۹۷	۰/۲۷۲۷	۰/۳۳۲۳
h(mm)	۸/۹۸	۶/۸۲	۸/۳۲

در روش رنی، برای محاسبه پارامترهای آنتروپی، ابتدا باید عوامل موثر بر آن محاسبه شود. که این عامل موثر شامل تأثیر پارامتر "m" بر پارامتر آنتروپی رنی "G" می‌باشد. برای تعیین مقدار مناسب "m" داده‌های اندازه‌گیری شده برای ۳۶/۲٪، ۵۰٪ و ۷۰٪ از عمق جریان آزمایش شدند. در جدول (۲) تأثیر پارامتر "m" بر پارامتر آنتروپی رنی "G" نشان داده شده است.

جدول ۲- تأثیر پارامتر "m" بر پارامتر آنتروپی رنی "G"

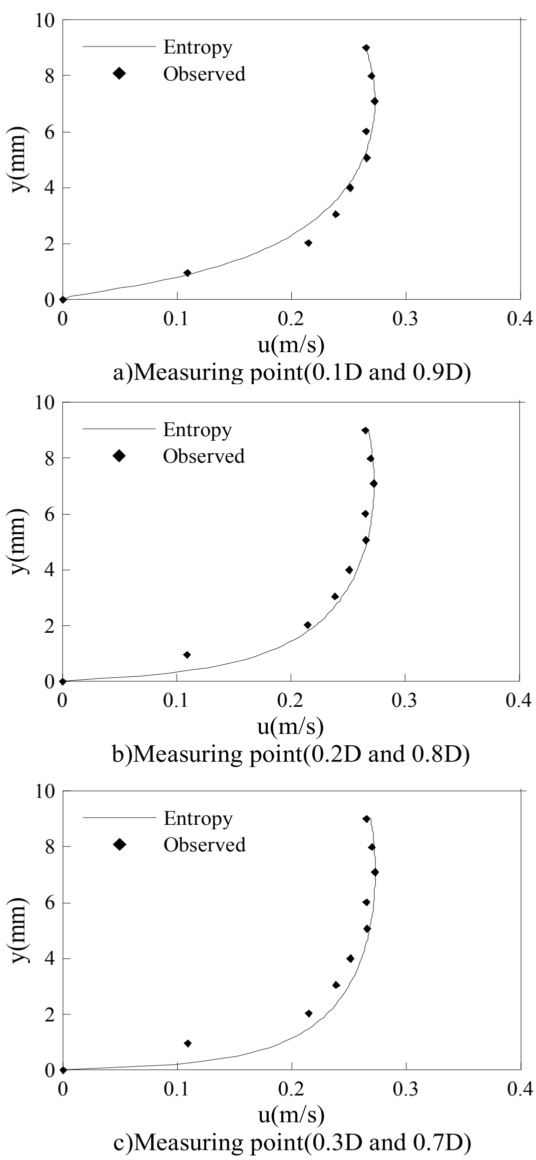
H/D٪	m =۰/۸	m =۰/۹	m =۰/۹۹
۳۶/۲	۱/۹۵	۱/۵۵	۱/۰۴۹
۵۰	۱/۸۵	۱/۴۵	۱/۰۵
۷۰	۱/۹۹	۱/۶۳	۱/۰۶۱

مطابق شکل (۳) سه سری داده مختلف در اعماق ۷۰٪، ۵۰٪ و ۳۶/۲٪ از سطح آب مقایسه شدند. باتوجه به این شکل مقدار حداکثر سرعت در نزدیکی سطح آب رخ داده که به دلیل اصطکاک دیواره جانبی می‌باشد و باعث پایین افتادن حداکثر سرعت در سطح آب می‌شود. براساس شکل مقادیر سرعت محاسبه شده به روش رنی با مقادیر سرعت اندازه‌گیری شده مطابقت خوبی دارد. مطابق جدول (۳) در شرایطی که مقدار m =۰/۹۹ دقت بالاتری نسبت به مقادیر m =۰/۹ و m =۰/۸ با داده‌های اندازه‌گیری شده دارد.

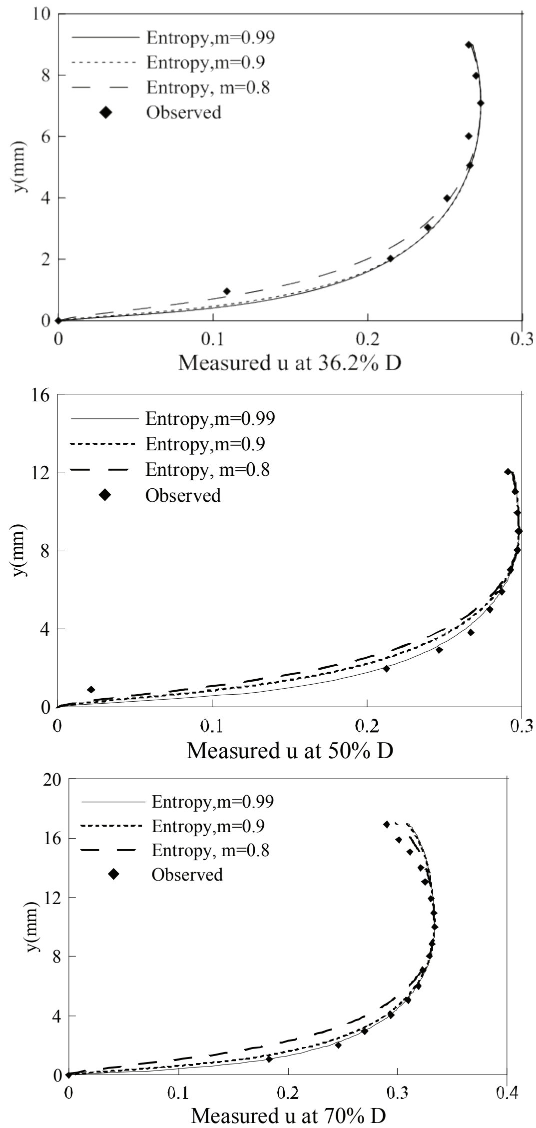
می‌باشد، در نظر گرفته شد. با استفاده از رابطه (۳۹) مقدار پارامتر آنتروپی "G" محاسبه و توزیع سرعت یک بعدی با استفاده از روش رنی برآورد شد و نتایج در شکل‌های (۴ تا ۶) ارائه شده است.

جدول ۳- ضریب همبستگی و ریشه میانگین مربعات خطا در اعماق مختلف

H/D٪	m =۰/۹۹		m =۰/۹		m =۰/۸	
	ρ	RMSE (m/s)	ρ	RMSE (m/s)	ρ	RMSE (m/s)
۳۶/۲	۰/۹۹	۰/۰۰۰۷۷	۰/۹۷۷	۰/۰۰۱۵	۰/۹۷۶	۰/۰۰۱۷
۵۰	۰/۹۹۹	۰/۰۲۸	۰/۹۹۸	۰/۱۷	۰/۹۹۲	۰/۲۱
۷۰	۰/۹۸۹۷	۰/۰۰۱۹	۰/۹۸۹۲	۰/۲۲	۰/۹۶۷	۰/۲۹



شکل ۴- تأثیر موقعیت نقاط اندازه‌گیری سرعت در ۳۶/۲٪ از عمق جریان



شکل ۳- تأثیر متغیر بر توزیع سرعت محاسبه شده توسط آنتروپی رنی برای ۳۶/۲، ۵۰ و ۷۰ درصد از عمق جریان

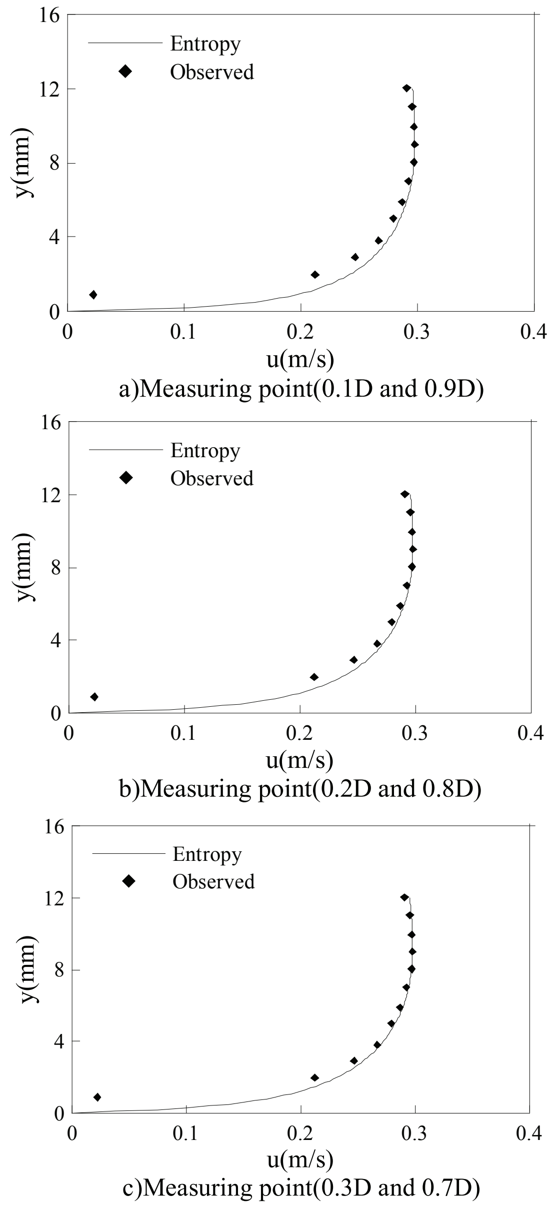
برای تعیین دقت پارامتر آنتروپی از ضریب هم‌بستگی و ریشه میانگین مربع خطا (RMSE) به‌ترتیب از روابط (۴۰) و (۴۱) استفاده شده است.

$$\rho = \frac{\sum (u_{obs} - \bar{u}_{obs})(u_{est} - \bar{u}_{est})}{\sqrt{\sum (u_{obs} - \bar{u}_{obs})^2 \sum (u_{est} - \bar{u}_{est})^2}} \quad (۴۰)$$

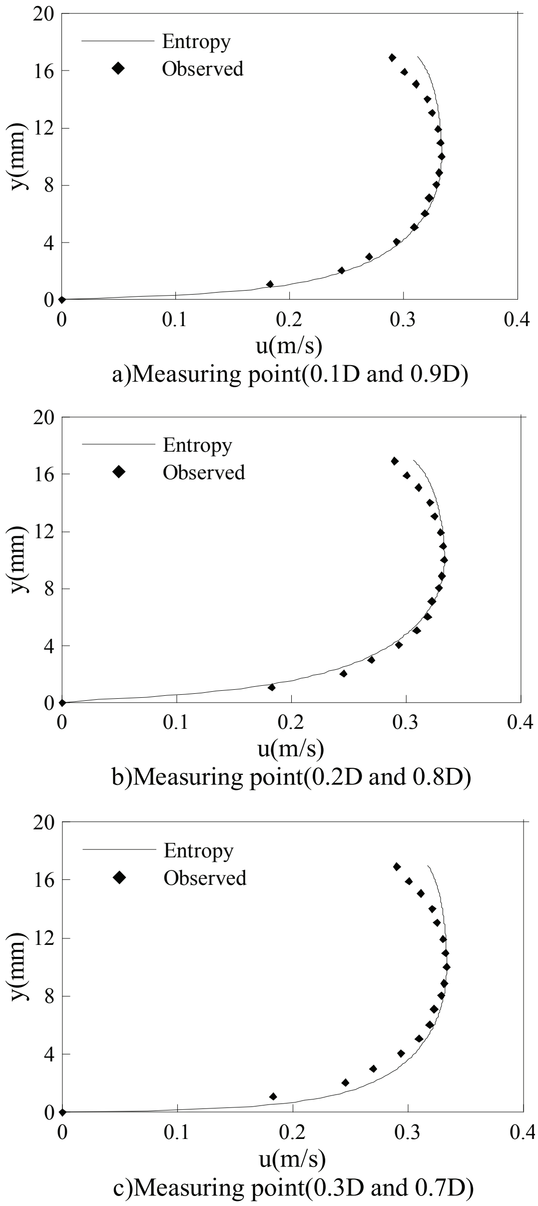
$$RMSE(m/s) = \sqrt{\frac{\sum (u_{obs} - u_{est})^2}{n}} \quad (۴۱)$$

که‌در‌آن u_{obs} سرعت‌مشاهداتی، $\bar{u}_{obs}$ میانگین‌سرعت‌های‌مشاهداتی، u_{est} سرعت‌تخمینی، $\bar{u}_{est}$ میانگین‌سرعت‌های‌تخمینی‌می‌باشد.

به‌منظور بررسی موقعیت نقاط اندازه‌گیری سرعت در دقت روش آنتروپی رنی برای تخمین توزیع سرعت، نقاط که فاصله نسبی آن‌ها از سطح آب (۰/۱D-۰/۹D)، (۰/۲D-۰/۸D) و (۰/۳D-۰/۷D)



شکل ۵- تأثیر موقعیت نقاط اندازه‌گیری سرعت در ۵۰٪ از عمق جریان



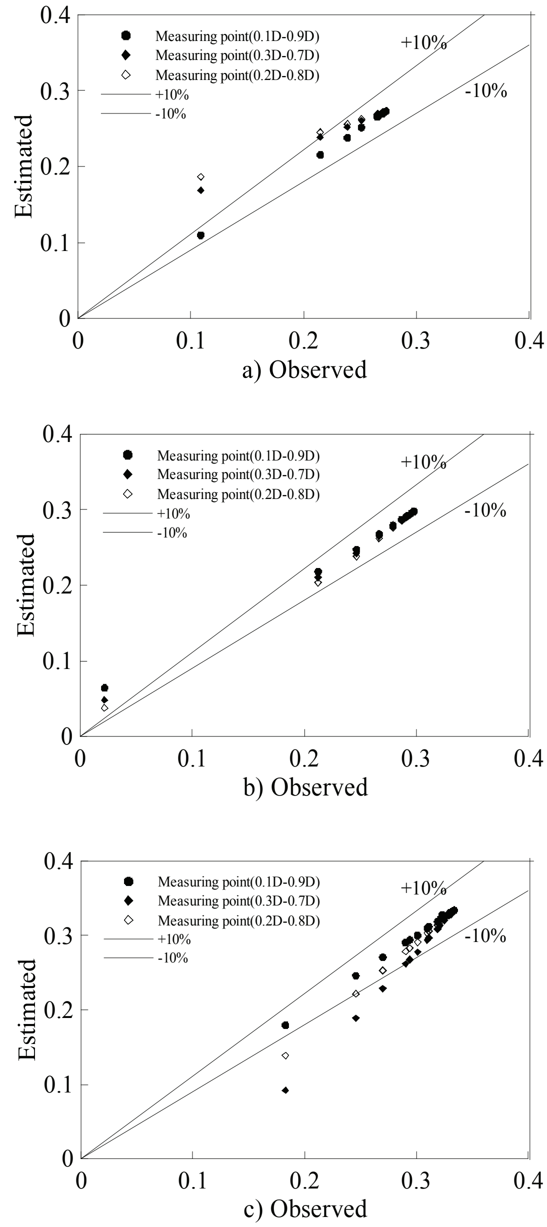
شکل ۶- تأثیر موقعیت نقاط اندازه‌گیری سرعت در ۷۰٪ از عمق جریان

همچنین برای تعیین دقت پروفیل سرعت تخمین زده شده با استفاده از دو نقطه از ریشه میانگین مربعات خطای نرمال شده به‌صورت رابطه (۴۲) استفاده شد.

$$NRMSE=\frac{1}{\bar{u}_o}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(u_{s(i)}-u_{o(i)}\right)^2}\times 100 \qquad (۴۲)$$

که در آن سرعت مشاهداتی در نقطه i، $u_{s(i)}$ سرعت محاسباتی در نقطه i و n تعداد داده‌های مشاهداتی می‌باشد. مقدار مناسب شاخص NRMSE در مدل‌سازی، کمتر از ۱۰ درصد است. این شاخص در محدوده ۱۰ تا ۲۰ درصد نشان‌دهنده وضعیت مناسب و ۲۰ تا ۳۰ درصد نشان‌دهنده وضعیت قابل قبول و بیش از ۳۰ درصد نشان‌دهنده عدم اطمینان در مدل است (Singh و Luo، ۲۰۰۸).

در شکل (۷) و در جدول (۴) مقدار ریشه میانگین مربعات خطای نرمال‌شده در موقعیت‌های (۰/۱D-۰/۹D)، (۰/۲D-۰/۸D) و (۰/۳D-۰/۷D) برای حالات ۳۶/۲ درصد از عمق جریان، ۵۰ درصد از عمق جریان و ۷۰ درصد از عمق جریان نشان داده شده است.

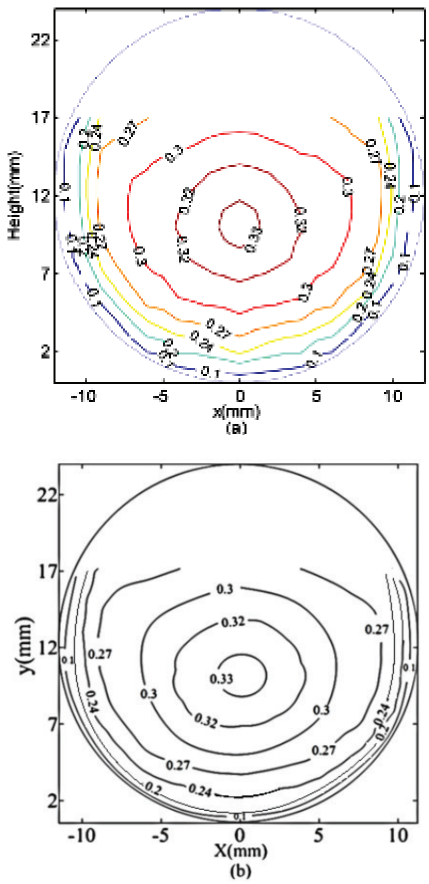


شکل۷- مقدار ریشه میانگین مربعات خطای نرمال شده در موقعیت‌های مختلف برای a) ۳۶/۲٪، b) ۵۰٪ و C) ۷۰٪ از عمق جریان

جدول ۴- مقدار ریشه میانگین مربعات خطای نرمال شده در موقعیت‌های مختلف

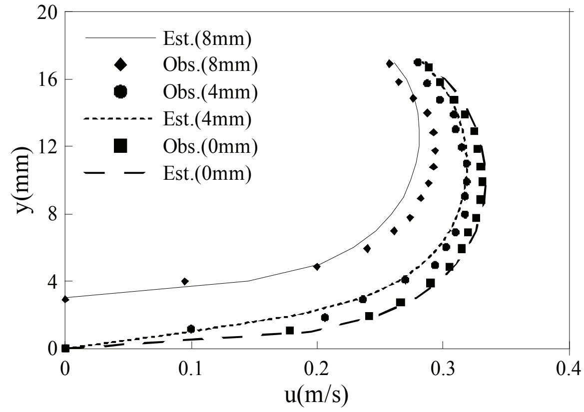
موقعیت نقاط اندازه‌گیری سرعت			
۰/۷D & ۰/۳D	۰/۸D & ۰/۲D	۰/۹D & ۰/۱D	٪H/D
۱۲/۶۷	۹/۷۷	۰/۲۳	۳۶/۲
۴/۷۷	۳/۰۲۲	۲/۳۶	۵۰
۱۰/۳۸	۴/۷۱	۰/۵۱	۷۰

در جدول (۴) مشاهده می‌شود مقدار برآورد توزیع سرعت در شرایطی که دو نقطه اندازه‌گیری سرعت در فاصله ۰/۱ و ۰/۹ عمق جریان از سطح آب قرار داشته باشند، دقت بالاتری خواهد داشت. در شکل (۸) توزیع سرعت دو بعدی با استفاده از روش آنتروپی رنی برای ( ) نشان داده شده است. همانطور که در شکل نشان داده شده است سرعت جریان در نزدیک دیواره تحت تاثیر نیروی اصطکاک دیوار قرار می‌گیرد و با فاصله از دیواره لوله سرعت افزایش می‌یابد.



شکل ۸- توزیع سرعت دو بعدی برای ۷۰٪ از عمق جریان a) داده‌های مشاهداتی b) داده‌های محاسباتی

به‌منظور بررسی دقت توزیع سرعت دو بعدی تخمین زده شده، در شکل (۹) توزیع قائم سرعت در مرکز لوله، فاصله ۴ میلی‌متر و ۸ میلی‌متر از مرکز لوله در نظر گرفته شد. در جدول (۵) مقدار ریشه میانگین مربعات خطای نرمال شده برای داده‌های مشاهداتی و محاسباتی نشان داده شده است. با استفاده از جدول می‌توان نتیجه گرفت روش آنتروپی رنی دقت بالایی در تخمین توزیع سرعت دو بعدی دارند.



شکل ۹- مقایسه توزیع سرعت یک بعدی برای ۷۰٪ از عمق جریان

جدول ۵- مقدار ریشه میانگین مربعات خطای نرمال شده در قائم‌های مختلف

X(mm)	NRMSE
۰	۰/۱۳
۴	۰/۲۸
۸	۱/۸۱

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، تخمین توزیع سرعت دو بعدی براساس روش آنتروپی با اندازه‌گیری سرعت در دو نقطه استفاده شد. همچنین اثر موقعیت دو نقطه سرعت در برآورد توزیع سرعت بررسی شد و موقعیت بهینه تعیین شد. در ابتدا با تعریف تابع توزیع تجمعی، پارامترهای آنتروپی بهینه شدند، سپس با اندازه‌گیری سرعت در دو نقطه در اعماق ۳۶/۲٪، ۵۰٪ و ۷۰ ٪ از سطح آب از لوله دایره‌ای پروفیل سرعت تخمین زده شد. نتایج نشان دادوقتی دو نقطه اندازه‌گیری در فاصله (۰/۱D-۰/۹D) از سطح آب قرار گیرد، تخمین توزیع سرعت دقیق‌تر خواهد بود.

منابع

تیموری یگانه، م. قبادیان، ر. و حیدری، م.م. ۱۴۰۰. مقایسه روابط مختلف برآورد نیمرخ عمقی سرعت طولی بر مبنای روش بهینه سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک. نشریه علمی پژوهشی مهندسی آبیاری و آب ایران، ۱۲(۴۵): ۱۲۲-۱۳۷.

Chiu C.L. 1988. Entropy and 2-D velocity distribution in open channels. Journal of Hydraulic Engineering, 114(7): 738–56.

Chiu CL. 1989. Velocity distribution in open channel flow. Journal of Hydraulic Engineering, 115(5): 576–94.

Clark S.P. and Kehler N. 2011. Turbulent flow characteristics in circular corrugated culverts at mild slopes. Journal of Hydraulic Research, 49(5): 676–84.

Cui HJ. and Singh VP. 2013. Two-Dimensional velocity distribution in open channels using the Tsallis entropy. ournal of Hydraulic Engineering, 18(3): 331–9.

Jiang Y., Li B. and Chen J. 2016. Analysis of the Velocity Distribution in Partially-Filled Circular Pipe Employing the Principle of Maximum Entropy. PloS ONE, 11(3): e0151578.

Kumbhakar M. and Ghoshal K. 2016. Two dimensional velocity distribution in open channels using Renyi entropy. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 450(15): 546-559

Kumbhakar M. and Ghoshal K. 2017. One-Dimensional velocity distribution in open channels using Renyi entropy. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 31(4): 949–959.

Luo H. and Singh VP. 2011. Entropy theory for two-dimensional velocity distribution. Journal of Hydraulic Engineering, 16(4): 303–15.

Maghrebi M.F. 2006. Application of the single point measurement in discharge estimation. Advances in Water Resources, 29: 1504-1514.

Marini G., Martino GD., Fontana N., Fiorentino M. and Singh VP. 2011. Entropy approach for 2D velocity distribution in-open channel flow. Journal of Hydraulic Research, 49(6): 784–90.

Rahimpour M. and Maghrebi M.F. 2006. Prediction of stage–discharge curves in open-channels using a fixed-point velocity measurement. Journal of Flow Measurement and Instrumentation, 17: 276-281.

Renyi A. 1961. On measures of entropy and information, in: Proceedings, 4th Berkeley Symposium on Mathematics. Statistics and Probability, 4.1: 547–561.

Shannon CE. 1948. A mathematical theory of communication. Bell System Technical Journal, 27(7): 379–423.

Singh V.P. and Luo H. 2011. Entropy theory for distri-

Teymouri Yeganeh M. and Heidari MM. 2020. Estimation of one-dimensional velocity distribution by measuring velocity at two points. Flow Measurement and Instrumentation, 73(2020): 101737.

Yoon J.I., Sung J. and Lee MH. 2012. Velocity profiles and friction coefficients in circular open channels. Journal of Hydraulic Research, 50(4): 304–11.

bution of one-dimensional velocity in open channels. Journal. of Hydrologic Engineering., 16(9): 725-735.

Sterling M. and Knight D.W. 2000. Resistance and boundary shear in circular conduits with flat beds running part full. Proc. ICE Water Maritime Energy,.142(4): 229–40.