

Performance of three different temperature temporal downscaling methods

Sh. Tajabadi^{1*}, B. Ghahraman², A. Ziaee³

1, 2, 3- Former Graduate Student, Professor and Assistant Professor of Water Engineering, Ferdowsi university of Mashhad, Iran.

*(Corresponding Author Email: bijangh@ferdowsi.um.ac.ir)

Received: 25-12-2015

Accepted: 8-3-2016

کارایی سه روش متفاوت ریزمقیاس سازی زمانی دما

شیمیا تاج آبادی^۱، بیژن قهرمان^۲، علی نقی ضیائی^۳

۱، ۲ و ۳- به ترتیب دانش آموخته کارشناسی ارشد، استاد و استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد.

*(نویسنده مسئول، E-Mail: bijangh@ferdowsi.um.ac.ir)

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۲/۲۴

تاریخ پذیرش: ۹۵/۵/۳۰

Abstract

Sufficient measurements of effective parameters with suitable temporal and spatial distributions for all phenomena are needed. However, providing the data and informations are difficult and costly. So, temporal and/or spatial downscaling is of prime importance. By downscaling, one can generate data from available ones. There are different downscaling methods in literature but they are not compared with each other yet. In this research, the performance of three different downscaling methods of self similar fractal, piecewise self similar fractal, and periodic regression are compared. Three-hour temperature data of Mashhad synoptic station were considered for 1992-2009 period. Modeling was done for daily data and was downscaled to three-hour period, the results were compared with measured data. Similar fractal method was superior over the other two methods, based on two criteria of Root Mean Square Error, and Akaike Information Criteria.

Keywords: Downscaling, Fractal, Temporal Time Series.

چکیده

تحلیل مناسب پدیده‌ها نیازمند اندازه‌گیری‌های کافی تمامی پارامترهای مؤثر با پراکنش مکانی و زمانی مناسب می‌باشد؛ اما با توجه به دشواری و پرهزینه بودن دستیابی به کلیه اطلاعات پارامترهای مؤثر، ریزمقیاس‌سازی زمانی و/یا مکانی پارامترها ضروری است. ریزمقیاس‌سازی، فرآیند تولید داده مورد نیاز از داده موجود و در دسترس می‌باشد. روش‌های متفاوتی برای ریزمقیاس‌سازی داده‌ها با کاربردهای مختلف توسط پژوهش‌گران پیشنهاد شده است، اما پژوهش‌های بسیار اندکی به مقایسه روش‌های مختلف پرداخته است. در این مقاله کارایی سه روش مختلف شامل فرکتال خودمتشابه، فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای و رگرسیون تناوبی مورد مقایسه قرار گرفته است. سری زمانی دمای روزانه ایستگاه سینوپتیک مشهد برای سال‌های ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۹ در نظر گرفته شد. در ابتدا برای دمای روزانه مدل‌سازی شد و سپس نتایج به مقیاس زمانی سه-ساعته ریزمقیاس و با داده‌های اندازه‌گیری شده مقایسه گردید. نتایج نشان دادند که با توجه به معیارهای ارزیابی ریشه میانگین مربعات خطا و نیز معیار اطلاعاتی آکائیک، فرکتال خودمتشابه با اختلافی ناچیز نسبت به دو روش دیگر ریزمقیاس‌سازی را با دقت مناسب‌تری انجام داده است.

واژه‌های کلیدی: ریزمقیاس‌نمایی، سری زمانی دما، فرکتال.

شیوهی معمول برای ساخت فرکتال عبارتند از:

- **فرکتال‌های زمان‌گریز:** این فرکتال‌ها با یک رابطه بازگشتی در هر نقطه در فضا تعریف می‌شوند (مانند صفحه مختلط). مثال‌هایی از این نوع عبارتند از مجموعه مندلبروت، مجموعه جولیا و فرکتال کشتی شعله‌ور و فرکتال لیاپونوف.

- **سیستم توابع تکراری:** این فرکتال‌ها یک قاعده جایگزینی هندسی ثابت دارند. مجموعه کانتور، منحنی پینو، برفدانه کخ، مربع T، اسفنج منگر برخی از مثال‌های این نوع فرکتال هستند.

- فرکتال‌های تصادفی: به جای فرآیندهای قطعی، با فرآیندهای تصادفی ساخته می‌شوند.

هندسه فرکتالی^۲ شاخه‌ای از ریاضیات است که در میدان‌های گسسته و متناوب کاربردهای فراوان دارد (Pathirana, ۲۰۰۱)؛ از آن جمله می‌توان به مدل‌سازی سری‌های زمانی کمیت‌های مختلفی مانند الکتروکاردیوگرام، لاگ چاه و نوسانات صوت (Marvasti و Strahle, ۱۹۹۵)، آنالیز داده‌های تلاطم (Puente, ۱۹۹۵) و مدل‌سازی سیگنال‌ها (Barnsley, ۱۹۹۳) اشاره کرد. یکی دیگر از کاربردهای هندسه‌ی فرکتال تولید داده‌هایی است که مقیاس آنها با داده‌های اندازه‌گیری متفاوت است، که از آن به ریزمقیاس‌نمایی یاد می‌شود (Tsai و McQuarrie, ۱۹۹۸؛ Pathirana, ۲۰۰۱). از بین منابع متعدد در اینجا تنها به دو مورد اشاره می‌شود. کاربردی مشخص برای مدل‌سازی سری زمانی ساعتی بارندگی در ژاپن توسط پاتیرانا (Pathirana, ۲۰۰۱) گزارش شده که در آن با استفاده از مفاهیم فرکتال سری زمانی بارندگی با مقیاس زمانی ۵ دقیقه از روی بارندگی ۲ روزه تولید شده است. وی همچنین پس از مدل‌سازی داده‌های بارندگی که با مقیاس زمانی دو روز ثبت شده بودند توانست به ریزمقیاس‌نمایی سری زمانی با مقیاس دو ساعت بپردازد. ولیدی و همکاران (۱۳۹۲) روش فرکتال خودمتمشابه را برای ریزمقیاس‌سازی سری زمانی دما استفاده کردند. در شرایطی که رفتار پدیده اندکی نامنظم باشد امکان استفاده از روش خودمتمشابه قطعه‌ای وجود دارد. روش رگرسیون تناوبی نیز جایگزینی تجربی برای این دو روش فرکتال به‌شمار می‌آید. در اینجا کاربرد سه روش ریزمقیاس‌نمایی بر روی داده‌های دمای مشهد به‌کار خواهد رفت.

استفاده شد. شهر مشهد مرکز استان خراسان رضوی، در شمال شرق ایران و در طول جغرافیایی ۵۹ درجه و ۱۵ دقیقه تا ۶۰ درجه و ۳۶ دقیقه و عرض جغرافیایی ۳۵ درجه و ۴۳ دقیقه تا ۳۷ درجه و ۸ دقیقه واقع است. ارتفاع شهر از سطح دریا ۹۸۵ متر است. آب و هوای مشهد معتدل و

دستیابی به اطلاعات صحیح پارامترهای مؤثر که در زمان و مکان تغییرپذیرند و به عنوان متغیرهای تصادفی و پویا شناخته می‌شوند، به منظور شناسایی بهتر پدیده‌ها، بسیار سودمند است. دستیابی صحیح به این اطلاعات نیازمند وجود داده‌های مناسب در مکان و زمان می‌باشد، که عموماً در عمل امکان‌پذیر نمی‌باشد. بدین ترتیب برای دستیابی به اطلاعات ریزمقیاس در زمان و مکان و به منظور اعمال مدیریت بهینه، ریزمقیاس‌نمایی^۱ زمانی و مکانی خصوصیات ضروری است (Tsai و McQuarrie, ۱۹۹۸).

دامنه نوسانات پارامترهای هواشناسی مانند دمای هوا، در مقیاس‌های مختلف، متفاوت می‌باشد. ریزمقیاس‌نمایی با روش‌های مختلفی از جمله تابع رگرسیون یک متغیره، تابع رگرسیون چندگانه، تابع اسپیلاین و تابع فرکتال انجام می‌شود (Li و Li, ۲۰۰۸). چنانچه در محاسبه تابع، بعد زمان به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفته شود، آنگاه این تابع مقدار کمیت مورد نظر را در مقیاس‌های زمانی کوچکتر از مقیاس داده‌های مورد مطالعه تخمین می‌زند. هم چنانکه اگر بعد مکان به عنوان متغیر مستقل فرض گردد، این تابع مقدار کمیت مورد نظر را در مقیاس‌های مکانی کوچکتر از مقیاس داده‌های مورد مطالعه، برآورد می‌کند. اصطلاحاً به این تابع، تابع درون‌یاب گفته می‌شود زیرا می‌توان با استفاده از آن، مقدار کمیت مورد مطالعه را در فاصله دو داده متوالی (در بعد زمان یا مکان) در مجموعه داده‌های یک کمیت تخمین زد (Li و Li, ۲۰۰۸).

واژه فرکتال در سال ۱۹۶۷ توسط ریاضیدان لهستانی به نام بنوئیت مندلبروت وارد دنیای ریاضیات شد. مندلبروت وقتی که بر روی تحقیقی پیرامون طول سواحل انگلیس مطالعه می‌نمود به این نتیجه رسید که هر گاه این طول با مقیاس بزرگ اندازه‌گیری می‌شود طول اندازه‌گیری شده کوچکتر از زمانی است که با مقیاس بزرگتر اندازه‌گیری انجام می‌گردد. وی این طول را با مقیاس‌های مختلف اندازه‌گیری کرد و در نهایت رابطه‌ای توانی میان طول اندازه‌گیری شده و مقیاس اندازه‌گیری به دست آورد. سپس نمای این رابطه توانی را بعد فرکتالی معرفی نمود. سه

مواد و روش‌ها

- مواد پژوهش:

در این تحقیق از داده‌های ایستگاه سینوپتیک مشهد به صورت روزانه و سه ساعته از سال ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۹ میلادی

متغیر است. حداکثر درجه حرارت در تابستان‌ها ۴۳ درجه بالای صفر است و میانگین دمای سالانه آن ۱۵/۷ سانتیگراد می‌باشد (<http://en.wikipedia.org/wiki/Mashhad>).

- روش پژوهش:

برای ریزمقیاس‌نمایی دمای مشهد از سه روش فرکتال خودمتشابه، خودمتشابه قطعه‌ای و رگرسیون تناوبی استفاده شد. در ادامه مبانی نظری این سه روش به اختصار بیان می‌شود.

۱- فرکتال خودمتشابه: مدل میان‌یابی خطی فرکتال یا فرکتال خودمتشابه روشی عملی برای نمایش داده‌های گسسته و خودمتشابه یا نزدیک به خودمتشابه است. تابع میان‌یابی خطی فرکتال با استفاده از سیستم توابع تکرار و نگاشت‌های متشابه‌ساز کل تابع را به هر قطعه‌ای از تابع نگاشت کرده و یک تابع خودمتشابه را تولید می‌کند. در این مدل فرض می‌شود که تغییرات در هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه داده‌های یک کمیت از تغییرات در کل مجموعه داده‌های کمیت مورد مطالعه پیروی می‌کنند؛ در نتیجه می‌تواند مدل مناسبی برای ریزمقیاس‌سازی باشد. به منظور تعیین نقاط درون‌یابی، تعیین فاکتور مقیاس عمودی (d) در توابع درون‌یاب فرکتال (توابع نسبی برشی؛ معادله‌های ۱ تا ۴) و در نتیجه تعیین نقاط بهینه درون‌یابی به منظور مدل‌سازی مجموعه داده‌ها، از تمامی نقاط در مجموعه داده‌ها استفاده می‌گردد.

$$W: IR^2 \rightarrow IR^2, W(x,y) = (ax + by + e, cx + dy + f) \quad (1)$$

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = AX + t \quad (2)$$

در این معادله W تابع نسبی، مختصات هر نقطه از فضای دو بعدی و ضرایب a تا f پارامترهای تابع بوده و اعداد حقیقی هستند. بردار t باعث جابجایی نقاط به مقدار $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ شده و ماتریس A ماتریسی ۲×۲ است، این ماتریس یک تبدیل خطی است و باعث دوران شکل حول مبدأ مختصات می‌گردد.

تابع نسبی برشی، در واقع همان تابع نسبی است با این تفاوت که مقدار پارامتر b در این تابع معادل صفر در نظر گرفته می‌شود. به طور کلی اگر داده‌های یک کمیت به صورت $\{(x_i, F_i) \in R^2 : i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ تعریف شوند به طوری که $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ باشند و هر داده به عنوان یک نقطه درون‌یابی در نظر گرفته شود و سیستم توابع تکرار نیز شامل مجموعه‌ای از توابع درون‌یاب نسبی برشی به صورت $\{R^2 : W_n, n = 1, 2, \dots, M\}$ و معادله (۳) باشند، آنگاه با در نظر گرفتن شرایطی که در معادله (۴) بیان شده‌اند، می‌توان توابع درون‌یابی را در فاصله هر دو نقطه درون‌یابی متوالی محاسبه نمود.

$$W_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$W_n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, W_n \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ for } n = 1, 2, \dots, M \quad (4)$$

در این معادلات W_n ، n-امین تابع نسبی برشی، $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ به ترتیب مختصات اولین و آخرین نقطه در مجموعه داده‌های کمیت مورد نظر و $\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ مختصات دو نقطه درون‌یابی متوالی در مجموعه داده‌ها می‌باشند. برای محاسبه ضرایب تابع‌های درون‌یابی پس از انجام مراحل چهار معادله (معادله‌های ۵ تا ۸) زیر حاصل می‌شود. پنج مجهول در این چهار معادله وجود دارد که پس از محاسبه ضریب d_n (فاکتور مقیاس عمودی)، می‌توان با حل معادلات چهار مجهول e_n, c_n, a_n و f_n در تابع نسبی برشی را محاسبه نمود.

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0} \quad (5)$$

$$e_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0} \quad (6)$$

$$c_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_N - x_0} - \frac{d_n (y_N - y_0)}{x_N - x_0} \quad (7)$$

$$f_n = \frac{x_N y_{n-1} - x_0 y_n}{x_N - x_0} - \frac{d_n (x_N y_0 - x_0 y_N)}{x_N - x_0} \quad (8)$$

در نهایت هر تابعی که در سیستم توابع تکرار تعریف شده است به طور مجزا بر روی تمامی نقاط در مجموعه داده‌های کمیت مورد مطالعه اعمال شده و تمام نقاط این مجموعه را به فاصله‌ی میان دو نقطه درون‌یابی متناظر با هر تابع درون‌یاب انتقال می‌دهد. بدین ترتیب مجموعه داده‌های کمیت مورد مطالعه مدل‌سازی می‌شود (Strahle و Marvasti, ۱۹۹۵).

۲- فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای: با توجه به اینکه در ابعاد کلی

یک پدیده طبیعی، خاصیت خودمتشابهی به وضوح مشاهده نمی‌شود و تشخیص این خاصیت دشوار است، با استفاده از مدل‌های فرکتالی خودمتشابه می‌توان به مدل‌سازی دقیق پدیده‌های طبیعی پرداخت. بنابراین بهتر است برای تشخیص خاصیت خودمتشابهی در یک پدیده، آن را به مقیاس‌های کوچکتر تقسیم کرده و خاصیت خودمتشابهی را در هر کدام از مقیاس‌های کوچک، بررسی کرد (Strahle و Marvasti, ۱۹۹۵). از این رو، مدل فرکتالی خودمتشابه قطعه‌ای، مدلی است که خاصیت خودمتشابهی در یک پدیده را در مقیاس‌های کوچکی از آن پدیده مورد بررسی قرار می‌دهد. این مدل به گونه‌ای عمل می‌کند که برای هر بخش از جسم فرکتال، سیستم توابع تکرار مجزا را تولید نموده و سپس با استفاده از تکرار مکرر سیستم توابع تکرار به مدل‌سازی و ریزمقیاس‌نمایی همان بخش از جسم فرکتالی می‌پردازد. به عبارتی در تابع فرکتال خودمتشابه با استفاده از یک سیستم توابع تکرار و توابع

درون‌یابی، کل تابع را به هر قطعه‌ای از تابع منتقل کرده و یک تابع خودمتشابه تولید می‌شود. اما در تابع فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای بازه‌هایی از تابع را به قطعاتی از تابع منتقل می‌کنیم. گرچه تابع نهایی خودمتشابه نیست، ولی خودمتشابه قطعه‌ای است، به این صورت که کل تابع از مجموعه تبدیلاتی تشکیل خواهد شد که ساختار تشابهی بخش‌های آن حفظ شود. مدل فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای تعمیمی از مدل فرکتال خودمتشابه است و مبانی ریاضی آن در ساختار نظریه‌ی سیستم توابع تکرار جای دارد.

در این بخش تفاوت بین دو مدل فرکتال خودمتشابه و خودمتشابه قطعه‌ای به صورت موردی بیان می‌شود.

- در مدل فرکتال خودمتشابه دو مجموعه نقطه در اختیار داریم؛ یک مجموعه نقاط اصلی داده‌ها که موجود می‌باشد و دیگری مجموعه نقاط درون‌یابی است که تولید می‌شوند. اما در مدل فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای این دو مجموعه متفاوت می‌باشند؛ در اینجا مجموعه نقاط اصلی داده‌ها به دو مجموعه تقسیم می‌شوند. یکی از آن‌ها به بازه‌هایی به عرض δ بوده و "قطعه درون‌یابی" نام دارد و دیگری قطعه‌هایی به عرض Φ که "بخش مرجع" نامیده می‌شوند. در این مدل مجموعه اصلی داده‌ها به زیر مجموعه‌هایی با عرض Φ تقسیم می‌شود که هر کدام خود یک مجموعه داده اصلی به حساب می‌آیند.

- تفاوت دیگر دو مدل در فاصله بین نقاط درون‌یابی می‌باشد. در مدل فرکتال خودمتشابه فاصله بین تمامی نقاط درون‌یابی ثابت و یکسان نمی‌باشد و می‌تواند با توجه به روش مورد استفاده متغیر باشد. در صورتی که در مدل فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای فاصله بین نقاط درون‌یابی ثابت و یکسان بوده و می‌توان با توجه به دقت مورد نیاز مدل‌سازی فاصله بین تمامی نقاط درون‌یابی را انتخاب نمود. همچنین در این مدل فاصله بخش‌های مرجع هم ثابت و یکسان در نظر گرفته می‌شود. البته با این شرط که $\delta < \Phi$ همواره برقرار باشد.

- در مدل خودمتشابه برای محاسبه پارامتر μ (بیشترین فاصله‌ی عمودی بین نقاط تا خطی مستقیم که اولین نقطه را به آخرین نقطه متصل می‌کند) از همه نقاط موجود در مجموعه داده‌های اصلی استفاده می‌شود و تنها یک μ برای کل داده‌ها محاسبه می‌شود، اما در مدل خودمتشابه قطعه‌ای برای فاصله هر بخش مرجع Φ یک مقدار μ محاسبه می‌شود.

- محدودیت فاکتور مقیاس عمودی (۱،۱-) در دو مدل یکسان می‌باشد.

- در نهایت برای مدل‌سازی سری زمانی در مدل فرکتال خودمتشابه به این صورت عمل می‌شود که نقاط درون‌یابی بهینه انتخاب می‌شوند. پس از تعیین نقاط درون‌یابی بهینه و توابع درون‌یابی متناظر با آنها، کلیه توابع درون‌یابی یک‌بار بر

روی نقاط ثابت اعمال می‌شوند، چنانچه ریزمقیاس‌سازی انجام شده کافی باشد مدل متوقف و در غیر این صورت این تکرار تا زمانی که داده‌های مورد نیاز تولید شده باشند ادامه می‌یابد. در نهایت کمیت مورد نظر با دقت مورد نظر مدل‌سازی می‌شود. اما در مدل‌سازی با مدل فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای متفاوت عمل می‌شود. در اینجا برای هر بخش درون‌یابی باید بخش مرجع مناسب آن انتخاب شود. بدین منظور همه بخش‌های مرجع به اولین بخش درون‌یابی توسط تابع درون‌یابی بخش اول منتقل می‌شوند. هر تابع بر روی تمامی داده‌های بخش مرجع اعمال می‌شود و تمامی نقاط را به بازه دو نقطه درون‌یابی متناظر خود منتقل می‌کند. در نهایت بخش مرجعی به عنوان بخش مرجع بهینه برای اولین بخش درون‌یابی انتخاب می‌شود که فاصله میان نقاط مدل‌سازی شده و اندازه‌گیری شده در آن بخش درون‌یابی حداقل باشد و این کار برای دیگر بخش‌های درون‌یابی هم انجام می‌شود. در نهایت در هر بخش درون‌یابی بهترین بخش مرجع برای انتقال به آن بخش درون‌یابی انتخاب می‌شود. با توجه به اینکه طول بخش‌های مرجع بزرگتر از بخش‌های درون‌یابی می‌باشند، امکان انتخاب چندین بخش مرجع بهینه برای یک بخش درون‌یابی وجود دارد.

۳- رگرسیون تناوبی: در اکثر پدیده‌های هیدرولوژیکی و هواشناسی دوره تناوب مشاهده می‌شود (Holder, ۱۹۸۵).

دوره تناوب می‌تواند سالانه، ماهانه و حتی روزانه باشد. در این روش با در نظر گرفتن دوره تناوب سالانه در سری زمانی داده‌های دمای روزانه، یک رابطه رگرسیونی میان مقادیر اندازه‌گیری شده در سری زمانی داده‌های دمای روزانه (y_i) و ماتریسی از متغیرهای مستقل برقرار می‌شود. معادله رگرسیون تناوبی بصورت معادله (۹) تعریف می‌گردد.

$$y_i = \hat{\alpha} + \sum_{r=1}^s \left[\hat{\beta}_r \cos\left(\frac{2\pi r}{n} i\right) + \hat{\gamma}_r \sin\left(\frac{2\pi r}{n} i\right) \right] + e_i \quad (9)$$

متغیرهای مستقل در این معادله عبارتند از:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} \quad (10)$$

$$\hat{\beta}_r = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos\left(\frac{2\pi r}{n} i\right) \quad (11)$$

$$\hat{\gamma}_r = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin\left(\frac{2\pi r}{n} i\right) \quad (12)$$

در این روابط، i : شمارنده زمان، y_i : مقدار اندازه‌گیری شده در زمان i -ام، \bar{y} : میانگین داده‌های اندازه‌گیری شده، n : طول دوره تناوب مشاهده شده در سری زمانی داده‌های دمای روزانه، s : عدد ثابتی است که با توجه به طول دوره تناوب در داده‌ها تعیین می‌شود. اگر طول دوره تناوب فرد باشد، $s=1/2(n-1)$ و اگر طول دوره تناوب زوج باشد، $s=n/2-1$ است. به این ترتیب معادله رگرسیونی از

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_{obs} - T_{simulated})^2} \quad (13)$$

همچنین از معیار اطلاعات آکائیک (AIC) (رابطه ۱۴) به عنوان یک پارامتر آماری برای مقایسه بین مدل‌ها استفاده شده است. معیار AIC معیاری برای سنجش نیکویی برازش است که بر اساس مفهوم آنتروپی بنا شده و نشان می‌دهد که استفاده از مدل آماری به چه میزان باعث از دست رفتن اطلاعات می‌شود. به عبارت دیگر، این معیار تعادلی میان دقت مدل و پیچیدگی آن برقرار می‌کند. با توجه به داده‌ها، چند مدل متفاوت را با توجه به مقدار AIC رتبه‌بندی کرده و مدل دارای کمترین AIC را انتخاب می‌کنند. این معیار را می‌توان این‌گونه محاسبه کرد (Mazel و Hayes, ۱۹۹۲):

$$AIC_c = \ln\left(\frac{RSS}{x}\right) + \frac{x+y}{x-y-2} \quad (14)$$

در این رابطه x : تعداد جفت داده‌ها، y : تعداد پارامترهای ورودی مدل و RSS : مجموع مربعات باقی‌مانده می‌باشند.

بهترین سیستم توابع تکرار را حاصل می‌کند، لذا فاصله ۳۰ روز به عنوان فاصله مرجع بهینه انتخاب شد. در نهایت با استفاده از الگوریتم قطعی، به مدل‌سازی داده‌های دمای روزانه برای هرکدام از سال‌ها پرداخته شد. میانگین دمای روزانه، به عنوان داده ورودی انتخاب شد. همچنین با توجه به رفتار تناوبی سری زمانی داده‌ها، می‌توان از روش رگرسیون تناوبی برای مدل‌سازی سری زمانی داده‌های دما استفاده کرد. لذا، طول دوره تناوب معادل ۳۶۵ روز و $S=181$ در نظر گرفته شده است. به این ترتیب معادله رگرسیونی میان ماتریسی از پارامترهای مستقل (α ، β ، و γ) و مقادیر اندازه‌گیری شده دمای روزانه (y_i) تولید گردید. در نهایت پس از مدل‌سازی داده‌های روزانه به کمک سه روش، ریزمقیاس‌سازی سری زمانی دما با فاصله سه ساعت انجام شد و به دلیل حجم بالای نتایج دوره آماری، نتایج مربوط به مدل‌سازی روزانه داده‌های دمای سال میلادی ۲۰۰۹ برای سه روش متفاوت گزارش شدند.

متغیرهای مستقل و مقادیر اندازه‌گیری شده در سری زمانی داده‌های دمای روزانه (y_i) برقرار می‌گردد و می‌توان با استفاده از این روش برای هر مقدار اندازه‌گیری شده در زمان i -ام، مقداری را برای همان زمان برآورد کرد. علاوه بر این، چون تابع رگرسیون تناوبی به عنوان یک تابع درونیابی در هندسه اقلیدسی تعریف می‌شود، می‌توان با استفاده از این تابع مقدار داده‌های اندازه‌گیری شده در فواصل زمانی کمتر از ۲۴ ساعت را نیز مدل‌سازی نمود.

- معیار ارزیابی صحت مدل:

در بررسی‌های آماری از پارامتر ریشه دوم میانگین مربعات خطا، که معیاری برای بررسی میزان صحت مدل در ارائه نتایج می‌باشد، به عنوان شاخص واریانس بین مقادیر دمای اندازه‌گیری شده (T_{obs}) و دمای مدل‌سازی شده ($T_{simulated}$) (رابطه ۱۳) استفاده می‌شود. همچنین از مقایسه شیب و عرض از مبدأ خط رگرسیون بین مقادیر دمای اندازه‌گیری شده و دمای مدل‌سازی شده، به ترتیب با یک و صفر، به عنوان معیاری برای ارزیابی استفاده شده است.

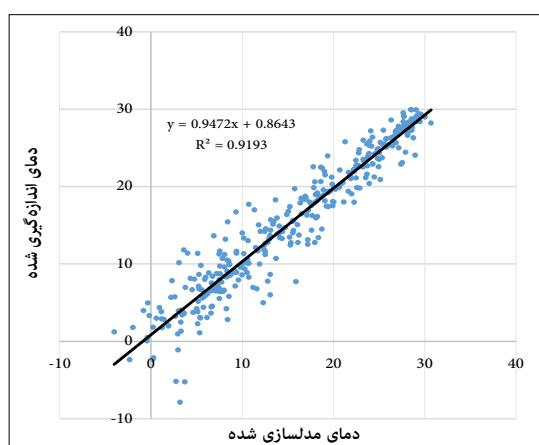
نتایج و بحث

در مدل فرکتالی خودمتمشابه، با استفاده از توابع نسبی برشی و با به‌کارگیری روش ارائه شده توسط Marvasti و Strahle (۱۹۹۵) برای محاسبه فاکتور مقیاس عمودی در توابع درونیاب فرکتال و الگوریتم Mazel و Hayes (۱۹۹۲)، اقدام به تعیین نقاط درونیابی (با فاصله ۱۰ روز) در سری زمانی داده‌های دمای روزانه گردید. در مدل فرکتال خودمتمشابه قطعه‌ای هم مانند مدل فرکتال خودمتمشابه با استفاده از توابع نسبی برشی و با تعیین فاصله δ برای تعیین نقاط درونیابی و با به‌کارگیری روش ارائه شده توسط مروستی و استریهال برای محاسبه فاکتور مقیاس عمودی در توابع درونیاب فرکتال، اقدام به محاسبه فاکتور مقیاس عمودی در سری زمانی داده‌های دمای روزانه گردید در این مدل برای تعیین نقاط درونیابی از فاصله ۱۰ روز استفاده شده، علاوه بر این با پیش‌بینی این نکته که تعیین فاصله مرجع ۳۰ روز

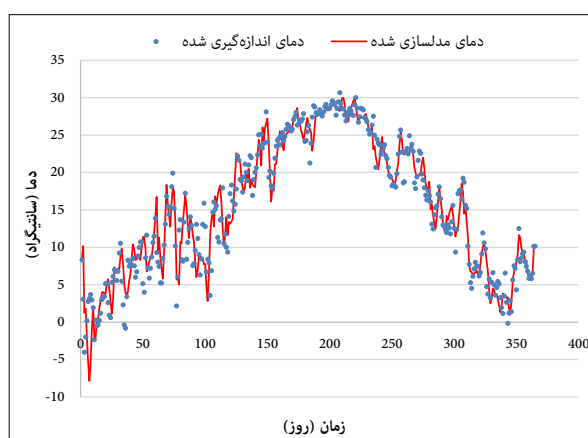
۱- ریزمقیاس‌سازی برای داده‌های روزانه

در شکل‌های (۱)، (۳) و (۵) برازش نقاط حاصل از توابع درون‌یابی با فاصله نقاط درون‌یابی ۱۰ روز و برای داده ورودی میانگین دمای روزانه با مقادیر اندازه‌گیری شده برای سال ۲۰۰۹ میلادی به ترتیب برای مدل‌های فرکتال خودمتشابه، فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای و رگرسیون تناوبی نشان داده شده است. برای دو مدل فرکتال خودمتشابه و فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای با توجه به قضیه کولاج (Bransley, ۱۹۹۳) اگر برازش اول سیستم توابع تکرار بر روی مقادیر دمای اندازه‌گیری شده در هر سال بتواند نتایج قابل قبولی را ارائه کند، برازش جاذب^۲ بر داده‌های دمای

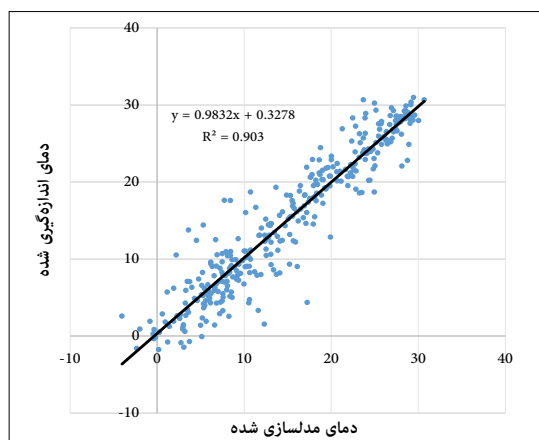
روزانه نیز مطلوب خواهد بود و مدل‌سازی سری زمانی با استفاده از توابع درون‌یاب با دقت قابل قبولی انجام خواهد شد. مقایسه تطبیقی نتایج مدل‌سازی شده از داده‌های دمای میانگین روزانه با استفاده از سه مدل با داده‌های اندازه‌گیری شده به ترتیب در شکل‌های (۲)، (۴) و (۶) برای سال مذکور گزارش شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود در شکل‌های تطبیقی حتی با کمی پراکندگی نقاط، شیب خط‌ها با مقدار یک و عرض از مبدأ آن‌ها با مقدار صفر در سطح ۵٪ برای دو مدل فرکتال خودمتشابه و رگرسیون و در سطح ۹٪ برای مدل فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای تفاوت معنی‌داری ندارد.



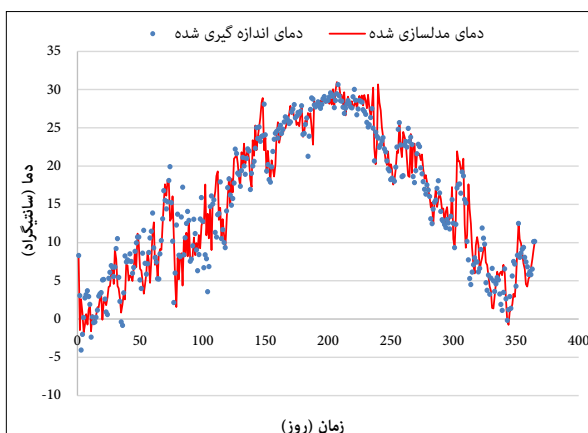
شکل ۲- مقایسه تطبیقی مقادیر دمای اندازه‌گیری شده با مقادیر دمای مدل‌سازی شده (به صورت خط ممتد) با مقادیر دمای میانگین روزانه اندازه‌گیری شده (به صورت نقطه) در سال ۲۰۰۹ مشهد



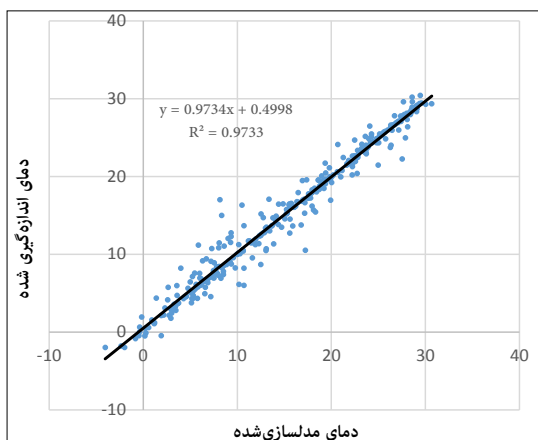
شکل ۱- مقایسه نتایج حاصل از مدل‌سازی دمای روزانه با استفاده از مدل فرکتالی خودمتشابه (به صورت خط ممتد) با مقادیر دمای میانگین روزانه اندازه‌گیری شده (به صورت نقطه) در سال ۲۰۰۹ مشهد



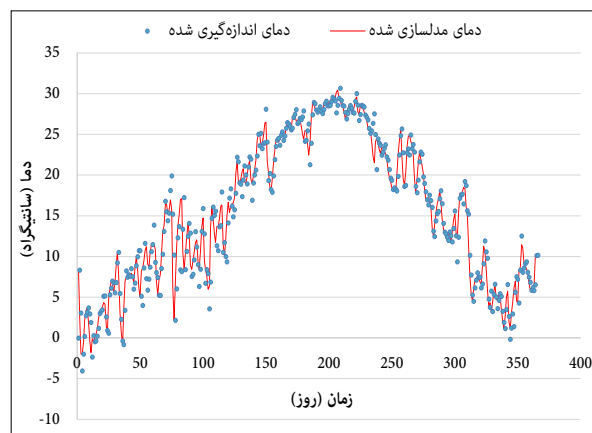
شکل ۴- مقایسه تطبیقی مقادیر دمای اندازه‌گیری شده با مقادیر دمای مدل‌سازی شده (به صورت خط ممتد) با مقادیر دمای میانگین روزانه اندازه‌گیری شده (به صورت نقطه) در سال ۲۰۰۹ مشهد



شکل ۳- مقایسه نتایج حاصل از مدل‌سازی دمای روزانه با استفاده از مدل فرکتالی خودمتشابه قطعه‌ای (به صورت خط ممتد) با مقادیر دمای میانگین روزانه اندازه‌گیری شده (به صورت نقطه) در سال ۲۰۰۹ مشهد



شکل ۶- مقایسه تطبیقی مقادیر دمای اندازه‌گیری شده با مقادیر دمای مدلسازی شده ($y=0.9734x+0.4998$; $R^2=0.9733$) توسط رگرسیون تناوبی در مقیاس زمانی روزانه در سال ۲۰۰۹ مشهد



شکل ۵- مقایسه نتایج حاصل از مدلسازی دمای روزانه با استفاده از مدل رگرسیون تناوبی (به صورت خط ممتد) با مقادیر دمای میانگین روزانه اندازه‌گیری شده (به صورت نقطه) در سال ۲۰۰۹ مشهد

جدول ۱- معیارهای ارزیابی صحت و دقت در سه مدل مختلف برای مدلسازی داده‌های دمای روزانه در سال‌های ۲۰۰۷ تا ۲۰۰۹ میلادی

مدل	RMSE (سانتیگراد)	R^2	AICc
فرکتال خودمتشابه	۲/۵	۰/۹۲	۱/۰۵
فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای	۲/۸۵	۰/۹	۱/۱۵
رگرسیون تناوبی	۱/۰۹	۰/۹۷	۰/۷۵

نی‌باشند که حاکی از مناسب بودن دقت مدلسازی‌ها می‌باشد. در جدول (۲) آماره ریشه دوم میانگین مربعات خطا، آماره ضریب همبستگی و معیار اطلاعات آکائیک برای ریزمقیاس‌سازی سه ساعته گزارش شده‌اند. در این مدلسازی هم نتایج مربوط به رگرسیون تناوبی با کمی اختلاف از مدل فرکتال خودمتشابه و اختلاف قابل توجهی نسبت به نتایج فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای، عملکرد بهتری را نشان می‌دهند.

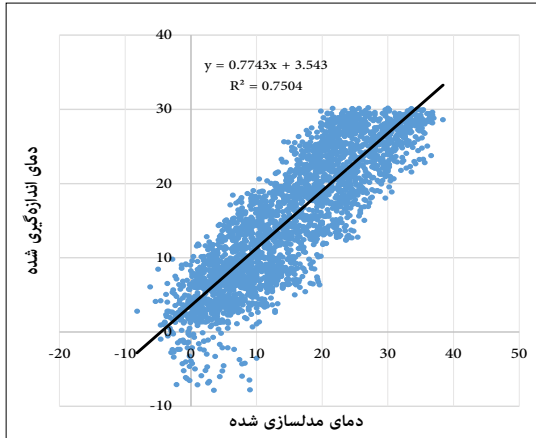
جدول ۲- معیارهای ارزیابی صحت و دقت در چند مدل مختلف برای مدلسازی داده‌های ریزمقیاس‌سازی شده سه ساعته در سال‌های ۲۰۰۷ تا ۲۰۰۹ میلادی

مدل	RMSE (سانتیگراد)	R^2	AICc
فرکتال خودمتشابه	۴/۸۹	۰/۷۵	۳/۳۲
فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای	۵/۰۷	۰/۷۴	۳/۴۳
رگرسیون تناوبی	۴/۵۲	۰/۷۹	۳/۱۸

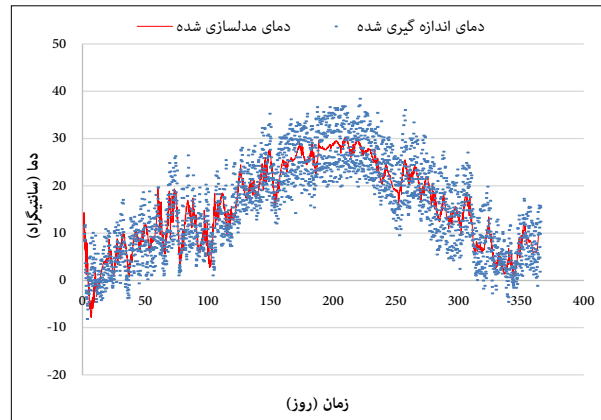
در جدول (۱) آماره ریشه دوم میانگین مربعات خطا برای بررسی میزان صحت مدل، آماره ضریب همبستگی که بیانگر دقت مدل می‌باشند و علاوه بر این دو آماره، آماره دیگری به نام معیار اطلاعات آکائیک که مدل بهینه را انتخاب می‌کند، برای مقایسه مدلسازی‌های دمای روزانه از سه مدل گزارش شده‌اند. با توجه به آزمون معنی‌داری و همانطور که در شکل‌های (۱) تا (۶) و جدول (۱) هم مشاهده می‌شود در مدلسازی روزانه نتایج مربوط به رگرسیون تناوبی نسبت به دو مدل دیگر برتری دارد.

۲- ریزمقیاس‌سازی سه ساعته

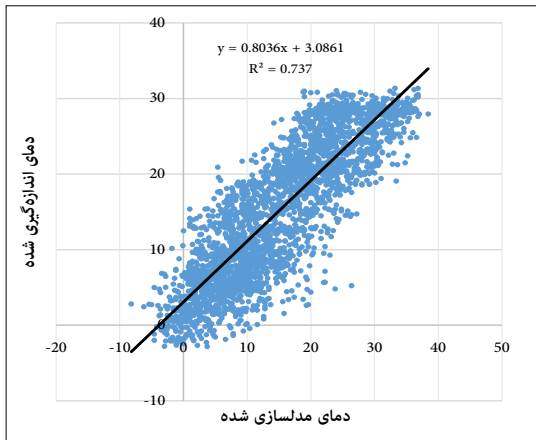
در این بخش با استفاده از سیستم توابع تکرار برای دو مدل فرکتال خودمتشابه و فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای و تابع رگرسیونی برازش داده شده بر داده‌ها، به ریزمقیاس‌نمایی زمانی سه ساعته دمای هر سال پرداخته شده است. مانند ریزمقیاس‌سازی روزانه، مدلسازی و ریزمقیاس‌سازی سه ساعته هم انجام شده است. مقایسه نتایج حاصل از ریزمقیاس‌سازی سه ساعته با استفاده از سه مدل فرکتال خودمتشابه، فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای و رگرسیون تناوبی با مقادیر دمای سه ساعته روزانه اندازه‌گیری شده در سال ۲۰۰۹ مشهد به ترتیب در شکل‌های (۷)، (۹) و (۱۱) نشان داده شده است. از آنجا که ریزمقیاس‌سازی سه ساعته به نوعی مدلسازی از روی داده مدلسازی شده‌ی روزانه می‌باشد مشابه بودن روند نتایج انتظار می‌رود؛ شکل‌های تطبیقی (۸)، (۱۰) و (۱۲) برای سه مدل تاییدی بر این انتظار است. مقادیر عرض از مبدأ و شیب‌ها به ترتیب با یک و صفر در سطح ۵٪ برای دو مدل فرکتال خودمتشابه و رگرسیون تناوبی و در سطح ۹٪ برای مدل فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای دارای اختلاف معنی‌داری



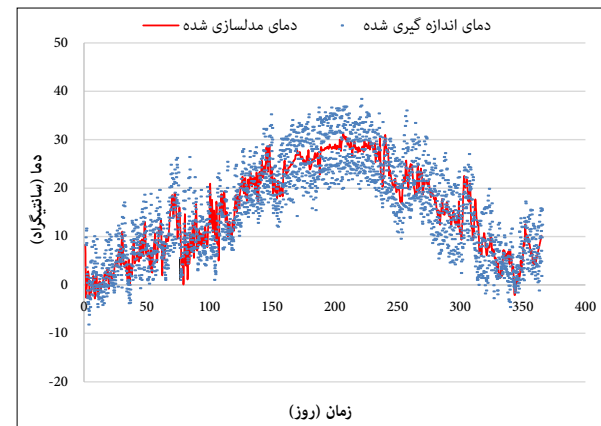
شکل ۸- مقایسه تطبیقی مقادیر اندازه‌گیری شده با مقادیر ریزمقیاس‌سازی شده ($y=3/5+0/77x$; $R^2=0/75$) در مقیاس زمانی سه ساعته در سال ۲۰۰۹ مشهد



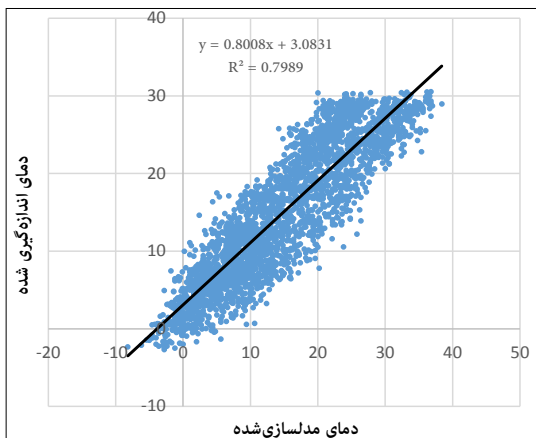
شکل ۷- مقایسه نتایج حاصل از ریزمقیاس‌سازی با استفاده از مدل فرکتالی خودمتشابه (به صورت خط ممتد) با مقادیر دمای سه ساعته روزانه اندازه‌گیری شده (به صورت نقطه) در سال ۲۰۰۹ مشهد



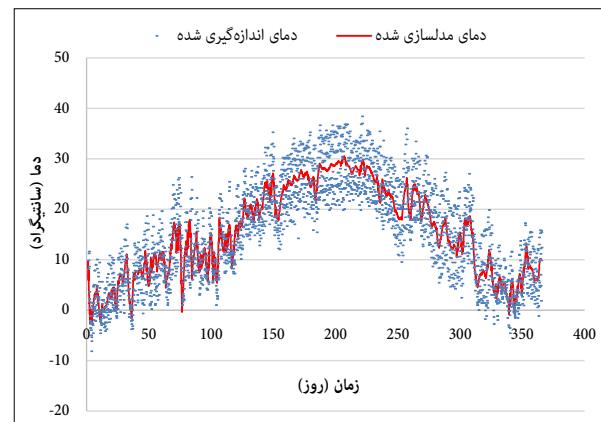
شکل ۱۰- مقایسه تطبیقی مقادیر دمای سه ساعته اندازه‌گیری شده با مقادیر دمای ریزمقیاس‌سازی شده ($R^2=0/74$) توسط فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای در مقیاس زمانی سه ساعته در سال ۲۰۰۹ مشهد



شکل ۹- مقایسه نتایج حاصل از ریزمقیاس‌سازی دمای روزانه با استفاده از مدل فرکتالی خودمتشابه قطعه‌ای (به صورت خط ممتد) با مقادیر دمای اندازه‌گیری شده سه ساعته (به صورت نقطه) در سال ۲۰۰۹ مشهد



شکل ۱۲- مقایسه تطبیقی مقادیر دمای سه ساعته اندازه‌گیری شده با مقادیر دمای ریزمقیاس‌سازی شده توسط رگرسیون تناوبی ($y=3/08+0/80x$; $R^2=0/79$) در مقیاس زمانی سه ساعته در سال ۲۰۰۹ مشهد



شکل ۱۱- مقایسه نتایج حاصل از دمای ریزمقیاس‌سازی شده توسط رگرسیون تناوبی (به صورت خط ممتد) با دمای میانگین روزانه اندازه‌گیری شده (به صورت نقطه) در سال ۲۰۰۹ مشهد

به طور کلی واضح است که نتایج حاصل از ریزمقیاس‌سازی سه ساعته عیناً نتایج ریزمقیاس‌سازی روزانه را نشان می‌دهند و این رویداد را می‌توان چنین تحلیل نمود که در ریزمقیاس‌سازی سه

ساعته عیناً رخداد ریزمقیاس‌سازی روزانه در مقیاس کوچکتر رخ می‌دهد، پس طبیعتاً نتایج باید در مقیاس کوچکتر هم تکرار شوند و روند یکسانی را نشان دهند، گرچه خطا مقداری افزایش می‌یابد.

تحلیل

حال می‌توان با مقایسه کلی ۱۸ سال آماری بررسی شده بین سه روش فرکتال خودمتشابه، فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای و رگرسیون تناوبی از نظر دقت نتایج با کمک آماره‌های آماری (جدول ۳)، داده مورد نیاز و در نهایت بهترین مدل به کمک معیار اطلاعاتی آکائیک را انتخاب نمود.

چنانچه بخواهیم مدل‌ها را از نظر داده مورد نیاز بررسی نماییم، مدل رگرسیون تناوبی بیشترین داده ورودی را نیاز دارد؛ به عبارتی برابر میزان S داده ورودی نیاز دارد تا بتواند مدل‌سازی را انجام دهد. اما در مدل فرکتال خودمتشابه و خودمتشابه قطعه‌ای در حالت بهینه تنها سه مقدار اندازه‌گیری شده با فواصل زمانی ۱۰ روز در هر ماه مورد نیاز می‌باشد تا مدل‌سازی مطلوب صورت گیرد.

آماره ریشه دوم میانگین مربعات خطا بیان‌کننده اختلاف بین مقادیر اندازه‌گیری شده و مدل‌سازی شده می‌باشد که هر چه مقدار این معیار برای مدل کمتر باشد، میزان صحت مدل در مدل‌سازی بیشتر است. با توجه به جدول (۳)، فرکتال خودمتشابه و رگرسیون تناوبی با کمی اختلاف بازه مقدار کمتری را شامل می‌شوند که مشخص می‌شود کارایی بهتری نسبت به مدل فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای دارند. همچنین از ضریب همبستگی، که در شکل‌های تطبیقی این تحقیق نشان داده شده است و میزان نزدیکی مقادیر مدل‌سازی به اندازه‌گیری را نشان می‌دهد، استفاده شده است. مقدار بهینه این آماره یک می‌باشد که هر چه اختلاف مقدار از یک افزایش یابد دقت مدل کاهش می‌یابد. مقدار این آماره برای مدل فرکتال خودمتشابه و رگرسیون تناوبی بازه بهتری را نسبت به فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای نشان می‌دهد.

جدول ۳- میانگین معیارهای ارزیابی صحت و دقت در مدل‌های مختلف برای مدل‌سازی داده‌های ریزمقیاس‌سازی شده سه ساعته در دوره ۱۹۹۲-۲۰۰۹ میلادی

مدل	RMSE (سانتیگراد)	R ²	AICc
فرکتال خودمتشابه	۴/۸۸	۰/۸۲	۳/۲۹
فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای	۵/۰۷	۰/۷۵	۳/۴۷
رگرسیون تناوبی	۴/۵۸	۰/۸۸	۳/۱۱

در نهایت از معیار اطلاعاتی آکائیک به عنوان یک پارامتر برای مقایسه بین مدل‌ها استفاده شده است که معیاری برای سنجش نیکویی برازش است و بر اساس مفهوم آنتروپی بنا شده و نشان می‌دهد که استفاده از مدل آماری به چه میزان باعث از دست رفتن اطلاعات می‌شود. به عبارت دیگر، این معیار تعادلی میان دقت مدل و پیچیدگی آن برقرار می‌کند. هر چه این معیار کمتر باشد نشان‌دهنده مناسب‌تر بودن مدل می‌باشد. از آنجا که تعداد جفت داده ورودی و پارامترهای سه مدل یکسان بوده‌اند پس تغییر این معیار وابسته به مقدار مجموع مربعات باقی‌مانده می‌باشد. هر چه مقدار این معیار کمتر باشد نشان‌دهنده کمتر بودن میزان باقی‌مانده بین مقادیر مدل‌سازی شده و اندازه‌گیری شده می‌باشد. مقدار این معیار مانند سه معیار قبلی برای دو مدل فرکتال خودمتشابه و رگرسیون تناوبی کمتر از مدل فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای است. در نهایت با مقایسه سه آماره و میزان داده مورد نیاز مدل‌ها، مشخص می‌شود که مدل فرکتال خودمتشابه با کمی اختلاف مناسب‌تر از سه مدل دیگر برای مدل‌سازی سری زمانی دما می‌باشد.

در مجموع روش‌های ریزمقیاس‌نمایی بر مبنای فرکتال پشته‌های علمی قوی‌تر داشته و به داده‌های کم‌تر نیاز دارد؛ درحالی که روش رگرسیون گرچه به خوبی می‌تواند ریزمقیاس‌نمایی را انجام دهد ولی پشته‌های علمی آن کم‌تر بوده و به داده‌ی بیش‌تری نیز نیاز دارد.

پی‌نوشت

- 1- Downscaling
- 2- Fractal geometry
- 3- Attractor

نتیجه‌گیری

در این تحقیق به معرفی سه مدل فرکتال خودمتشابه، فرکتال خودمتشابه قطعه‌ای و رگرسیون تناوبی به عنوان ابزارهایی به منظور انجام ریزمقیاس‌سازی داده‌ها پرداختیم. نتایج در مقایسه با نتایج حاصل از بررسی ولیدی و همکاران (۱۳۹۲) که از فرکتال خودمتشابه برای ریزمقیاس‌سازی دما استفاده نمودند و مقدار ضریب همبستگی را در بهترین حالت ۰/۷۷ بیان نمودند، روندی در جهت افزایش دقت نشان دادند. این افزایش دقت با سه آماره بررسی شده و داده مورد نیاز مدل هم مورد بررسی قرار گرفت.

- try analysis of turbulent data. *Signal Processing*, 41: 191-201.
- Mazel D.S. and Hayes M.H. 1992. Using iterated function systems to model discrete sequences. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40 (7): 1724-1734.
- McQuarrie A.D. and Tsai C.L. 1998. Regression and time series model selection. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. ISBN 981-02-3242-X.
- Pathirana A. 2001. Fractal modeling of rainfall: Down-scaling in time and space for hydrological applications. PhD thesis, University of Tokyo, Japan.
- Puente C.E. 1995. Geometric modeling of rainfall fields. Water Resources Center Technical Completion Report W-804. University of California, Davis.
- Strahle W.C. 1991. Turbulent combustion data analysis using fractals. *AIAA, J*, 3: 409-417.
- ولیدی، ن.، ضیائی، ع.ن.، قهرمان، ب. و انصاری، ح. ۱۳۹۲. استفاده از توابع درونیاب فرکتال برای ریزمقیاس نمایی زمانی داده‌های درجه حرارت. نشریه آب و خاک، ۲۷(۶): ۱۱۳۳-۱۱۳۲.
- Barnsley M.F. 1993. *Fractals Everywhere*. 2ed. New York, Academic Press.
- Holder R.L. 1985. Multiple regression in hydrology. Institute of hydrology Wallingford, Oxfordshire OX10 8 BB, ISBN 0948540001.
- <http://en.wikipedia.org/wiki/Mashhad>
- Li Z.F. and Li X.F. 2008. An explicit fractal interpolation algorithm for reconstruction of seismic data. *Chinese Physics Letters*, 3: 1157-1159.
- Marvasti M.A. and Strahle W.C. 1995. Fractal geome-